Ulrich KORTENKAMP, Berlin

Klammergebirge als Strukturierungshilfe in der Algebra

Einleitung

In der 5. Klasse wird zusätzlich zu den bereits bekannten Rechenregeln „von-links-nach-rechts“ und „Punkt-vor-Strich“ das Setzen von Klammern zur gezielten Beeinflussung von Vorrangregeln eingeführt. Ohne Klammern ist es nicht möglich, komplexere Rechenvorschriften zu formulieren; die Beherrschung der Schreibweise und das völlige Verständnis der Bedeutung sind die Grundlage für die gesamte weitere Arbeit in den Sekundarstufen. Schülerinnen und Schüler, die mit der Symbolik nicht umgehen können, haben im weiteren Verlauf stets Schwierigkeiten; unter anderem bei Termumformungen, dem Lösen von Gleichungen, der Formulierung von Termen bei Sachaufgaben etc.

Da in unserer Kultur das Lesen von Zeichenreihen grundsätzlich von links nach rechts erfolgt – und diese Regel zunächst im Deutschunterricht, spätestens mit der Einführung der Subtraktion auch im Mathematikunterricht – massiv eintrainiert wird, ergibt sich bei der Erfassung von komplexeren Termen für Kinder ein Problem (FREUDENTHAL, MALLE, VOLLRATH). Dennoch ist es wünschenswert, dass auch komplexere Zusammenhänge in ihrer Struktur erfasst werden können – in der Sprache wie in der Algebra.

Für Schülerinnen und Schüler, die keine Schwierigkeiten mit nicht linear geordneten Abläufen haben, stellen auch Klammerungen meist kein Problem dar; die Regel kann genannt werden und ihre Anwendung ist danach wohltuend klarer als die geschachtelten Sätze der deutschen Sprache. Schülerinnen und Schüler, die einen Term in Worte fassen können („das Produkt einer Summe und einer Differenz“) werden kaum Schwierigkeiten haben, den Term selbst zu verstehen.

In diesem Beitrag stellen wir eine Möglichkeit vor, auch denjenigen, denen die abstrakten Formulierungen schwer fallen, eine Hilfestellung in der Erfassung der Struktur und Bedeutung von Klammerausdrücken zu geben. Zusätzlich können wir ein Rezept angeben, welches in der Anfangsphase Halt gibt. Dadurch kann im Unterricht vermieden werden, dass die Problematik der Termerfassung dadurch umgangen wird, dass nur wenige, leichte Aufgaben gerechnet werden, die danach nicht weiter aufgegriffen werden.

Rezepte zur Klammerrechnung

In Schulbüchern finden sich rezeptartige Regeln wie diese (aus: Schrödel, Welt der Zahl 5):

(1) Klammern werden zuerst berechnet
(2) Punktrechnung geht vor Strichrechnung
(3) In allen anderen Fällen wird von links nach rechts gerechnet

Diese Darstellung suggeriert, dass Ausdrücke in diesen drei Schritten abgearbeitet werden können, was auch für die angegebenen Beispiele funktioniert. Sobald aber komplexere Terme ausgewertet werden sollen, funktioniert dies nicht mehr – alle drei Regeln müssen nämlich gleichzeitig beachtet werden! Dies mag ein Grund dafür sein, dass im restlichen Buch Klammern nur noch selten auftreten, und wenn, dann höchstens ein Paar pro Term.

In einem Berliner Gymnasium, frz. bilingualer Zweig, konnten wir verschiedene Lösungsversuche einer komplexeren Aufgabe beobachten. In der Gleichung

$$4 + 6 \cdot 10 + 100 \cdot 3 = 600$$

sollten Klammern so gesetzt werden, dass die Gleichung erfüllt wird. Im Gespräch mit Schülerinnen wurde klar, dass die richtige Reihenfolge („zuerst 4 plus 6, dann mal 10, dann plus 100 und dann mal 3“) nicht nur gefunden wurde, sondern auch verbalisiert werden konnte. Dennoch waren viele Lösungsversuche falsch. Oft wurde dabei nur die äußere Klammer des Ausdruck $((4+6)\cdot10+100)$ vergessen, und auf Nachfrage ergänzt. Schwächere Schülerinnen schlugen hier aber

$$(4 + 6) \cdot 10\ \ (+ 100\ ) \cdot 3 = 600$$

oder gar

$$(4 + 6\ )\cdot 10\ (+)\ 100 \cdot 3 = 600$$

vor, letzteres mit der – gar nicht so unsinnigen – Erklärung „Dann muss das plus vor dem mal gerechnet werden“.

Es liegt hier also bei einigen Schülerinnen ein fundamentale Schwäche im Umgang mit Klammern vor, und diese tritt bei mehrfach verschachtelten Klammerausdrücken deutlich zu Tage.

Klammergebirge

Für Informatiker ist das Problem der Erkennung von Klammerausdrücken die klassische Anwendung für so genannte *Grammatiken*. Tatsächlich ist das kleinste Beispiel für eine Grammatik, die sich nicht als regulärer Ausdruck darstellen lässt, diejenige, mit der Zeichenketten beschrieben werden, die genau so viele öffnende wie schließende Klammer besitzen, etwa wie diese:

$$((())((())()))$$

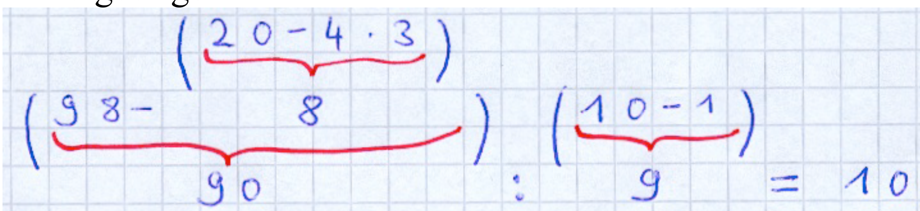
Die dazugehörige Grammatik beschreibt das Bildungsgesetz:

$$K \rightarrow\ '('\ K\ ')'\ \mid\ \varepsilon\ .$$

In Worten: Ein Klammerausdruck K ist entweder ein eingeklammerter Klammerausdruck oder das leere Wort ε.
Entscheidend ist hier eine winzige Bemerkung: Diese Beschreibung ist *rekursiv*, und wir können von einer Verschachtelungs- oder Rekursionstiefe sprechen, die angibt, wie oft wir die erste Regel nacheinander „aufgerufen" haben. Diese Rekursionstiefe können wir buchhalterisch mitverfolgen: Gehen wir den Ausdruck von links nach rechts durch, so erhöht sich die Rekursionstiefe bei jeder öffnenden Klammer um eins, und bei jeder schließenden Klammer wird sie um eins erniedrigt.
Dieses gleiche Prinzip können wir auf Terme anwenden: Wir lesen den Term von links nach rechts, und gehen eine Zeile höher, wenn wir eine Klammer öffnen, und eine Zeile tiefer, wenn wir eine schließen. So wird aus

$$(98-(20-4\cdot 3)):(10-1)$$

das Klammergebirge



(mit dazugehöriger Rechnung.
Dieses Um-schreiben eines algebraischen Ausdrucks auf ein Klammergebirge nutzt keine neue Notation! Es werden die bekannten und in der Zukunft zu verwendenden Symbole genutzt, nur ihre Anordnung wird geändert. Dabei tritt die Reihenfolge deutlich heraus: Der Ausdruck kann Zeile für Zeile von oben nach unten (der gewohnte Textfluss!) abgearbeitet werden, in jeder Zeile sind nur noch die – zu diesem Zeitpunkt als bekannt vorausgesetzten – Regeln „Punkt-vor-Strich" und „von-links-nach-rechts" zu beachten.
Wir geben mit diesem „Rezept" aber keineswegs nur eine Anleitung zum systematischen Abarbeiten komplizierter Terme; das kann ein Computer viel besser. Vielmehr geht es um das deutliche, visuelle Herausheben (im wahrsten Sinne des Wortes!) der Struktur und der Reihenfolge der Rechenoperationen.

Handlungsorientierte Umsetzung

Die oben beschriebene schriftliche Umsetzung von Termen in Klammergebirge lässt sich auch in anderer Form im Unterricht umsetzen. Mit Hilfe von Duplo- oder Lego-Steinen, die mit Zahlen und Rechenzeichen auf 2x2-Steinen und Klammern auf 4x2-Steinen („Achtern") beklebt wurden, kön-

nen Schüler, Schülerinnen und Lehrkräfte Rechenausdrücke aktiv zu Klammergebirgen verwandeln. Die Art und Weise der Beschriftung sorgt dabei fast automatisch für die richtige Gestalt.
Die Rechenausdrücke innerhalb einer Klammer können dann schrittweise durch ihre Ergebnisse ersetzt werden, bis man schließlich das Endergebnis in Händen hält. Wir weisen aber nochmals darauf hin, dass es nicht um ein Regelwerk für die systematische *Berechnung* von geschachtelten Termen geht, sondern um die Schulung des *Sehens* von algebraischen Strukturen (ganz in der Tradition der „Geometrie der Terme“ (FISCHER 1984).

Zusammenfassung

Mit Hilfe einer Betrachtungsweise aus der Informatik können wir die Struktur eines Terms derart visualisieren, dass die neu hinzugekommene Klammerregel von den beiden anderen Vorrangregeln separiert wird. Dadurch tritt die Struktur deutlich zu Tage. Mit Hilfe von einfachen Regeln können auch schwächere Schülerinnen und Schüler diese Visualisierungen selbst herstellen und ihren Blick trainieren.
Dieser Vorgehensweise liegt ein Prinzip zugrunde: Durch den Blick auf die entsprechenden Algorithmen der Informatik können wirre und unklare ad-hoc-Regeln durch klare und anwendbare Regelwerke ersetzt werden, und damit die Struktur des zu behandelnden Problems erfasst werden.
Vielen Dank an Angelika Marschall (Mathematik-Lehrerin der 5. Klasse an der Rücker-Oberschule Berlin), Torsten Jandt für die Hilfe bei der Gestaltung der Duplo-Steine und Hans-Joachim Vollrath für wertvolle Hinweise.

Literatur

FREUDENTHAL, HANS, Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band I/II, Klett 1973.
FISCHER, ROLAND, Geometrie der Terme oder Elementare Algebra vom visuellen Standpunkt aus, Mathematik im Unterricht 8, S. 19-34, Institut für Didaktik der Naturwissenschaften der Universität Salzburg, 1984.
MALLE, GÜNTHER, Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg, 1993.
VOLLRATH, HANS-JOACHIM, Algebra in der Sekundarstufe, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2003.