# Interaktives Whiteboard, iPad & Co. – das Klassenzimmer der Zukunft

Ulrich Kortenkamp, PH Karlsruhe

**Zusammenfassung**

Die technische Revolution schreitet unerbittlich voran. Wir kommen nicht umhin, den Unterricht in der Schule darauf einzustellen. Ich möchte in meinem Vortrag zeigen, wie diese neue Technologie eingesetzt werden kann und wo tatsächlich ein Mehrwert geschaffen werden kann. Dabei wird auch gezeigt, welchen mathematikdidaktischen Argumente für (und gegen) den Einsatz sprechen, und wie diese die (Weiter-)Entwicklung von Lehr- und Lernsoftware beeinflussen müssen.

## 1 Einleitung

*Moore's law*, die Beobachtung, das die Leistungsfähigkeit elektronischer Schaltkreise sich ungefähr alle 18 Monate verdoppelt, führt zu einem exponentiellen Wachstum der Leistungsfähigkeit von Computern[1]. Im gleichen Maße steigt auch die Miniaturisierung und die Verfügbarkeit von „Rechenmaschinen“: Waren früher noch ganze Räume, später dann Schränke, noch später immerhin noch Schuhkarton-große Gehäuse nötig, um diese Leistung zu beherbergen, so ist es inzwischen problemlos möglich, dies alles im wort-wörtlichen Sinne in die Tasche zu stecken. Vergleichen Sie aktuelle Mobiltelefone mit Laptops vor wenigen Jahren!

Dieser technische Fortschritt ist nicht aufzuhalten. Wir können eine Vertausendfachung ($2^{10} = 1024$) der Rechnerleistung einzelner Rechner in jeweils 15 Jahren ($15 \cdot 12 = 10 \cdot 18$) beobachten. Natürlich wissen wir nicht, ob dieser Trend durchgehalten werden wird, ernsthafte Zweifel fallen aber schwer. Hinzu kommt eine weitere Beobachtung: Die Ausstattung der *Kinder* mit leistungsfähigen Mobiltelefonen wird immer besser (im quantitativen Sinne), unter anderem bedingt durch die Weitergabe von Geräten innerhalb der Familie – nach 2 Jahren gibt es bei den

[1] In (Kortenkamp, 2004) wird beschrieben, wie man diesen Effekt zur Lösung von schwer berechenbaren Problemen nutzen kann

meisten Telefongesellschaften ein neues subventioniertes Handy, und das abgelegte Telefon wird der nächsten Generation vermacht.

Zu dieser technischen Ausstattung der Schulen mit Mobilgeräten „von unten” gesellt sich eine von der Politik und von besorgten Eltern vorangetriebene Kampagne, die Schulen nicht nur mit PC’s und Internet, sondern aktuell auch mit elektronischen Tafeln – von den jeweiligen Firmen auch SmartBoard, IntelliBoard, ActiveBoard, etc. genannt und im angelsächsischen Sprachraum als *interactive whiteboard* bezeichnet – versorgt.

Es lässt sich trefflich streiten, ob nicht die energetische Sanierung oder auch einfach nur die Renovierung von Schulgebäuden höhere Priorität haben müsste, ebenso wie auch der Einzug der Handys in das Leben der 12-, 10-, oder auch 8-jährigen nicht ohne Kritik hingenommen werden sollte. Die dahinter steckenden wahren Interessen und Profiteure bleiben gerne im Dunkeln, und die Kritik der LOGO-Philosophie von Bender[2] bleibt bestehen! Ich möchte hier aber betonen, dass wir die Technisierung wohl kaum aufhalten können, und statt einer Verweigerungshaltung müssen wir nach konkretem Nutzen für den Mathematikunterricht fragen. Hier ist die Mathematikdidaktik gefragt: Es gibt bestimmt positive Aspekte des Computereinsatzes, und es ist heutzutage auch unbestritten, das z.B. Dynamische Geometriesysteme für den Mathematikunterricht förderlich eingesetzt werden können.[3]

## 2 Ein technischer Quantensprung

Der Fortschritt ist allerdings nicht rein quantitativer Natur, genauso wenig wie der Computer im Unterricht nur dafür eingesetzt werden sollte, Rechnungen zu beschleunigen.[4] Die Schaffung neuer Eingabemethoden an interaktiven Tafeln und *smartphones* verändert die Kommunikation zwischen Bediener (also den Lehrerinnen und Lehrern und Schülerinnen und Schülern) und Gerät qualitativ, so wie es die allgemeine Einführung der Maus als weiteres Eingabemedium neben der Tastatur vor knapp 30 Jahren getan hat.

Es handelt sich bei einer interaktiven Tafel also nicht nur um einen Computer mit großem Bildschirm, sondern um ein neuartiges Gerät, bei dem die Interaktion mit dem Computer nicht indirekt – über das Verschieben der Maus, welches in Bewegungen des Mauszeigers umgesetzt wird – erfolgt, sondern direkt: Das Tippen auf die Projektionsfläche bewegt den Mauszeiger unmittelbar an die berührte Stelle. Hierzu ist, je nach Technologie, manchmal ein Stift notwendig, manchmal wird auch direkt die Berührung mit dem Finger zugelassen.

[2] ausführlich dargestellt in (Bender, 1987)

[3] Dies beschreiben zum Beispiel (Kittel, 2007; Hoffkamp, 2011) und viele andere mehr.

[4] Der Computer kann vielmehr komplett neue Unterrichtssituationen erzeugen, Prozesse begleiten und vieles mehr, wie in (Kortenkamp, 2007) ausführlicher erläutert wird.

Dieser direkte Zugriff auf den Mauszeiger kann nicht nur auf Tafeln mit Projektion durchgeführt werden, sondern auch direkt auf Bildschirmen, die an den Computer angeschlossen sind, oder – und das gibt es auch schon seit über 10 Jahren – auf Tablet-PCs oder mobilen Geräten wie PDAs (*personal digital assistants*), Pocket-PCs und, in letzter Zeit üblich, Mobiltelefonen.

Die Bedienung per Stift lässt sich noch leicht mit der Bewegung des Mauszeigers vergleichen. Werden jedoch die Finger verwendet, so können inzwischen nicht mehr nur einzelne Berührungen interpretiert werden, sondern auch Berührungen mit mehreren Finger. Diese sogenannten Multitouch-Geräte machen es endgültig notwendig, die Benutzerschnittstelle der damit ausgestatteten Geräte neu zu konzipieren. Da Computer bisher immer nur einen Mauszeiger hatten, kann die simultane Mehrfachberührung nicht mit herkömmlichen Programmen verarbeitet werden.

Ich möchte die Problematik hier an einem kleinen Beispiel verdeutlichen. Der folgende Programmcode in der Programmiersprache CindyScript (Richter-Gebert & Kortenkamp, 2012) sollte auch ohne Informatik-Kenntnisse nachvollziehbar sein.

In dieser Programmierumgebung kann zu verschiedenen Gelegenheiten Programmcode ausgeführt werden. Im Beispiel zeichnen wir eine Liste von Polygonen, wenn gezeichnet werden soll, wir erzeugen ein neues Polygon mit einer Ecke, wenn die Maus gedrückt wird, und wir ergänzen weitere Ecken und zeichnen eine Vorabversion des Polygons in roter Farbe während die Maus gezogen wird. Schließlich, wenn die Maus losgelassen wird, fügen wir das fertige Polygon zur Liste der zu zeichnenden Polygone hinzu. Der Code sieht wie folgt aus:

```
// Wenn gezeichnet wird:
forall(polygons,drawpoly(#));

// Wenn der Mausknopf gedrueckt wird:
polygon=[mouse()];

// Wenn die Maus mit gedruecktem Knopf gezogen wird:
polygon=polygon++[mouse()];
drawpoly(polygon,color->red(1));

// Wenn der Mausknopf losgelassen wird:
polygons=polygons++[polygon];
```

In diesem Programmfragment verlassen wir uns darauf, dass die Eingabe der Maus stets in der Abfolge *Knopf gedrückt–Maus bewegt–Knopf losgelassen* erfolgt. Würde die Maus ein weiteres Mal an einer anderen Stelle des Bildschirms gedrückt, so könnte das Programm nicht mehr funktionieren, da die Variable `polygon` das erste erzeugte Polygon noch nicht abgearbeitet hat.

In einer Multitouch-Umgebung ist dies allerdings keine zulässige Annahme. Tatsächlich möchten wir ja auch erlauben, dass mit mehreren Fingern gleichzeitig „gemalt" werden kann. In CindyScript wird dies durch eine Funktion `mtlocal` unterstützt, die für jede erneute Berührung einen neuen Satz Variablen bereitstellen kann. Alle weiteren Mausbewegungen werden dann dem korrekten Variablensatz zugeordnet, so dass der folgende Code wirklich funktioniert, wie man in der Abb. 1 erkennen kann.

```
// Wenn gezeichnet wird:
forall(polygons,drawpoly(#));

// Wenn der Mausknopf gedrueckt wird:
mtlocal(polygon); // jede Beruehrung erhaelt eine eigene polygon-Variable
polygon=[mouse()];

// Wenn die Maus mit gedruecktem Knopf gezogen wird:
polygon=polygon++[mouse()];
drawpoly(polygon,color->red(1));

// Wenn der Mausknopf losgelassen wird:
polygons=polygons++[polygon];
```

## 3 DGS und elektronische Tafeln

Die Geometrie ist für das Zeichnen an der Tafel prädestiniert. Auch die Eingabe mit einem Stift erscheint sinnvoll, wurde doch Geometrie seit jeher so betrieben. Nur weil bei der Dynamisierung der Geometrie am Ende der 1980er Jahre im Computereinsatz die Maus die entscheidende Rolle spielte, wurde die Verwendung von Stiften in der Geometrie zurückgedrängt. Die Stift-Bedienung von interaktiven Tafeln und auch kleinen Taschencomputern (z.B. dem Linux-basierten Sharp Zaurus) konnte aber schon um 2003 mit dem DGS Cinderella ausprobiert werden (Kortenkamp & Materlik, 2004a).

Im Gegensatz zum Nacheinander-Anklicken bei den meisten anderen Geometrieprogrammen

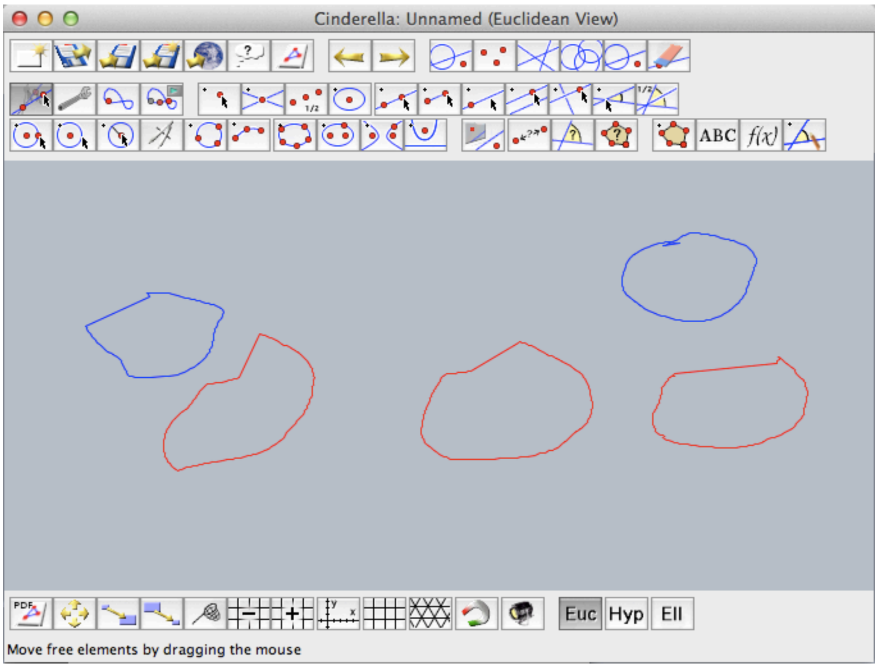


Abbildung 1: Drei Polygone werden gleichzeitig mit drei Fingern gezeichnet

verfolgt Cinderella eine klicken-ziehen-loslassen-Strategie zur Konstruktion von Objekten wann immer dies möglich ist. Eine Gerade durch zwei Punkte kann so in einem Zug gezeichnet werden. Für die Bedienung an der Tafel oder mit dem Stift erwies sich dies als natürlich. Ungelöst blieb hingegen zunächst das Problem, dass aus den vielen verschiedenen Konstruktionsmodi oder -werkzeugen nicht geschickt ausgewählt werden konnte. Hierzu war immer der umständliche Weg über Menüs (ganz ungeeignet für Stiftbedienung) oder platzraubende unübersichtliche Symbolleisten notwendig.

### 3.1 Skizzenerkennung

Ein von uns verfolgter Ansatz zur Lösung dieses Problems war eine Art „Handschrifterkennung" für geometrische Konstruktionen (Kortenkamp & Materlik, 2004b). Anstatt Konstruktionswerkzeuge zu verwenden, die jeweils einen eigenen Modus zur Bedienung verlangen, muss man hier die Konstruktion nur so skizzieren, wie man es auch mit einem Stift auf Papier täte. Zeichnet man beispielsweise eine Gerade durch zwei Punkte, so wird dies als Konstruktion der Geraden durch diese zwei Punkte interpretiert. Zeichnet man eine Gerade durch einen Punkt, die senkrecht auf bereits bestehenden Gerade steht, so *konstruiert* man die Senkrechte durch den Punkt auf diese Gerade. Manche Konstruktionen bedürfen hierbei weiterer Informationen – so deutet man an, dass man einen Mittelpunkt konstruieren möchte, indem man die beiden definierenden Punkte zunächst antippt, bevor man einen Punkt in der Mitte zwischen diesen beiden zeichnet.

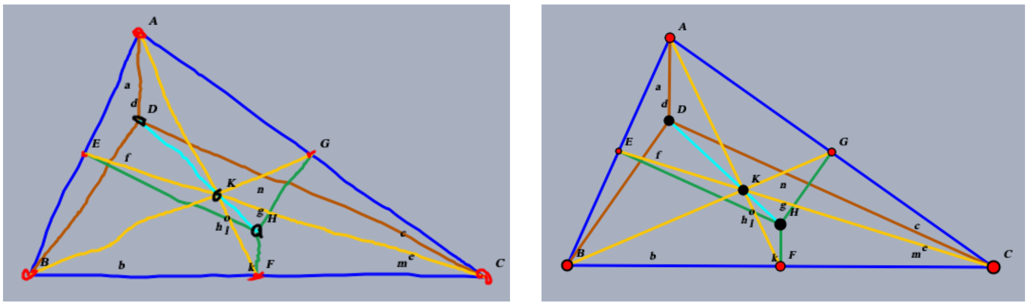

Abbildung 2: Eine Eulergerade in Handzeichnung mit automatischer Korrektur der Inzidenzen und in der begradigten Version

Dieser Ansatz wurde gemeinsam mit der E-Kreide-Software, einer Lösung für die Aufzeichnung und Wiedergabe von Vorlesungen an interaktiven Whiteboards, 2003 auf der Messe CeBit in Hannover vorgestellt.

Eine interessante Weiterentwicklung war ein Skizziermodus, der auch in den interaktiven Konstruktionen zulässt, dass Punkte, Geraden und Kreise wie handgemalt aussehen. Zugleich werden die Handskizzen aber über einen automatischen Beweiser angepasst und korrigiert, so dass mathematisch zwingende Inzidenzen auch in der Zeichnung angezeigt werden, selbst wenn diese vom Benutzer nicht so gezeichnet wurden (Kortenkamp & Richter-Gebert, 2004).

Bei der Analyse und dem Design eines solchen Skizziermodus werden die Unterschiede zwischen Zeichnung und Konstruktion sehr deutlich. Aus einer Zeichnung wird nicht klar, wie die sichtbaren Objekte untereinander verknüpft sind. Selbst die (beim schrittweisen Entstehen auch verfügbare!) Reihenfolge der Elemente kann nicht alle Zweifelsfälle auflösen. Man kann sich diesen Unterschied auch an einer anderen Beobachtung verdeutlichen: Selbst erfahrene Benutzer von Geometrieprogrammen benötigen oft eine Vorab-Skizze, um eine Konstruktion zu erstellen. Es ist leichter, diese per Hand auf Papier zu zeichnen und sie dann in einem zweiten Schritt im DGS umzusetzen.

Eine Lösung können hier sog. *constrained based DGS* sein, bei denen zunächst Objekte erstellt werden, die dann erst in einem zweiten Schritt mit Relationen (den *constraints*) untereinander verknüpft werden. Ein sehr weit fortgeschrittenes System ist hier Geometry Expressions (Saltire Software, 2008). Da der Mathematikunterricht bisher allerdings konstruktionsbasiert ist (der *constraint*-Ansatz hat keine Entsprechung bei der Konstruktion mit Stift und Papier) mangelt es noch an geeignetem Unterrichtsmaterial um dies im Unterricht umzusetzen.

Gerade an interaktiven Whiteboards entsteht aber oft eine Situation, in der nicht bewusst konstruiert wird, sondern in der eine Konstruktion aus einer Skizze entwickelt wird. Wir müssen also genauer untersuchen, wie eine Computerunterstützung *für den Mathematikunterricht* mit diesen neuen Werkzeugen aussehen kann. Das gilt nicht nur für die Geometrie, die hier als Beispiel herhalten musste, sondern in allen Bereichen der Mathematik, wie im Folgenden erläutert werden soll.

# 4 Always consider the context

Bevor wir Wege zeigen können, wie wir gewinnbringende Lernsituationen mit interaktiven Tafeln und iPads aus mathematikdidaktischer Sicht gestalten können müssen wir uns über das Medium an sich klarer werden. Obwohl sich beide Gerätetypen zunächst ähneln, sind sie im Einsatz fundamental verschieden.

## 4.1 Tafel

Die (klassische) Tafel hat eine klare Rolle im Klassenzimmer: Sie ist der zentrale Ort für Dokumentation des Unterrichtsgeschehens und das Hauptpräsentationsmedium. Dabei kann man an der Tafel schreiben, zeichnen, malen, man kann Plakate oder anderes daranheften oder man kann darauf projizieren. Dabei können auch mehrere Einsatzzwecke zugleich verfolgt werden – die reine Größe der Tafel lädt dazu ein, mehrere Darstellungen gegenüber zu stellen oder Ergebnisse tabellarisch festzuhalten.

Durch die frontale Anordnung im Klassenzimmer ist sie ein idealer Ort für alles, was von der ganzen Klasse gesehen werden soll oder von der Klasse gemeinsam erarbeitet wird.

Interaktive Tafeln sind leider meist kleiner als normale Tafeln. Das ist aber nicht der Hauptunterschied. Durch den angeschlossenen Computer wird die Tafel oft auch als PC mit großem Monitor missbraucht. In vielen Klassenzimmern wird oft herkömmliche Lehr-/Lernsoftware auf diesen Tafeln verwendet. Auch die Extra-Software der Schulbuchverlage ist nur bedingt an die komplett andere Situation angepasst.

Mit der üblicherweise mitgelieferten „Tafelsoftware” kann wenigstens teilweise die Rolle der alten Tafel übernommen werden. Hierbei gibt es Vorteile wie eine Speicher- und Druckmöglichkeit für die erstellten Tafelbilder und das einfache Einbinden von Grafiken. Es gibt aber auch Nachteile: Das Schriftbild kommt qualitativ nicht an eine echte Tafel heran, die Tafel ist kleiner, und natürlich ist eine solche Tafel wesentlich anfälliger für Störungen. Wägt man die Vor- und Nachteile gegeneinander ab so spricht nicht genug für einen Wechsel auf die moderne Technik.

Betrachtet man allerdings moderne Tafelsoftware wie Open-Sankoré[5] dann erkennt man dort

[5] Download unter `http://open-sankore.org`. Sankoré basiert auf Uniboard und ist seit Oktober 2010 *open source software* und kostenlos erhältlich. Die Software für Windows, Linux und Mac OS X funktioniert mit jeder

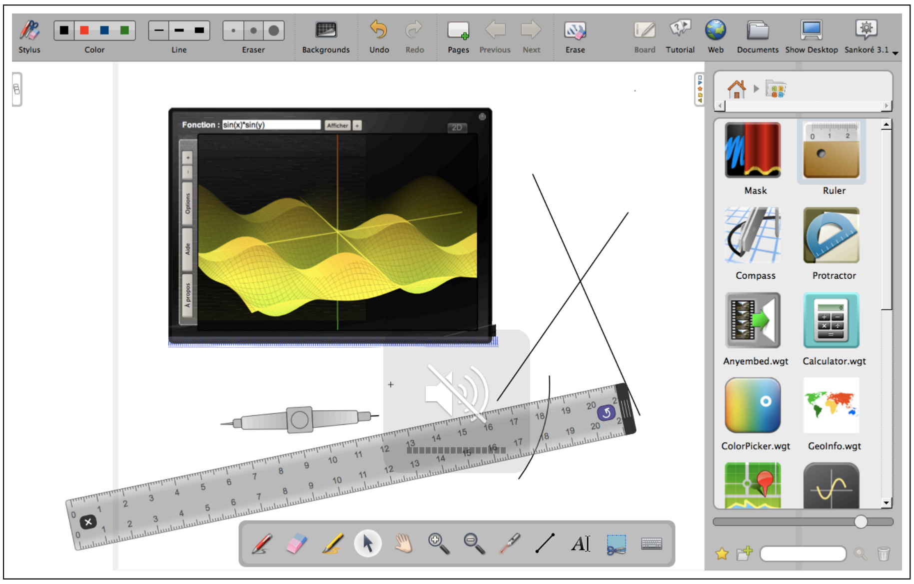


Abbildung 3: Die Tafelsoftware Open-Sankoré

.

ein sinnvolleres Konzept. Durch sog. *widgets*, kleine Programme, die man als Objekte auf die stets beschreibbare Tafel legen kann, bleibt die Rolle der Tafel erhalten. Mit Werkzeugen wie Taschenrechner, Funktionsplotter, Lineal, Zirkel, etc. lässt sich an der elektronischen Tafel integriert arbeiten (Abb. 3). Werkzeuge wie Google Maps, ein Internet-Browser und andere machen diese Tafelsoftware zu einem idealen Werkzeug. Eine besondere Stärke ist die überaus durchdachte und einfache Bedienung. So wird zum Beispiel auf das explizite Speichern von Tafelbildern verzichtet – sämtliche Tafelbilder werden grundsätzlich ohnehin gespeichert, und so vergisst man nie, etwas zu speichern, was man noch einmal brauchen könnte.

Es ist also ein Konzept auf der Basis von virtuellen Mathematik-Objekten denkbar, die auf der Tafel angeordnet werden können. Später werden wir sehen, welche zusätzlichen Wünsche aus der Mathematikdidaktik an solche virtuellen Objekte gestellt werden müssen.

## 4.2 iPhone, iPod touch und iPad

Mobiltelefone und Tablet-Computer – heutzutage dominieren neben Android-basierten Geräten die iOS-betriebenen Geräte von Apple – sind im Gegensatz zur Tafel persönliche Geräte (*personal devices*). Weil diese Geräte so klein ist, muss jede Schülerin und jeder Schüler ein eigenes solches Geräte haben. Neben der Möglichkeit, einen Klassensatz solcher Geräte zur Ausleihe bereit zu halten, gibt es inzwischen auch das BYOD (*bring your own device*) Konzept: Die Kinder (oder Studenten) bringen ihre eigenen iPods, Smartphones, etc. mit und die Schule (oder Hochschule) sorgt nur für die Verfügbarkeit der notwendigen Software. Schü-

---

Tafel oder auch mit Tablet-PCs.

lerinnen und Schüler, die nicht über eigene Geräte verfügen, erhalten Leihgeräte oder Subventionen zur Beschaffung eigener Geräte. Damit ist auch die Verantwortung in die Hand der Schülerinnen und Schüler gelegt.[6]

Erst mit der richtigen Software wird ein solches mobiles Gerät zu einem digitalen Werkzeug für den Schulunterricht. Es gibt aber für jeden Zweck eine *App*, ein Programm.[7] Für Mathematik gibt es Computeralgebrasysteme, Geometrieprogramme, Funktionsplotter, Tabellenkalkulationen und sehr viele andere Apps mehr.

Im Gegensatz zur Tafelsitutation und auch im Gegensatz zu herkömmlichen PCs wird auf diesen Mobilgeräten normalerweise immer nur ein Programm ausgeführt. Ein Fenster-System macht bei der gegebenen Bildschirmgröße keinen Sinn, und die Bedienung wäre zu umständlich. Diese Beschränkung auf eine App kann aber durchaus positiv gesehen werden: Durch die Wahl des Programms wird die Rolle des Geräts als digitales Werkzeug klar definiert. Multitasking, also die gleichzeitige Verarbeitung vieler Aufgaben, gehört zwar zu den heutzutage üblichen und grundlegenden Betriebssystem-Funktionen für Computer, doch dieses Multitasking ist nicht für konzentriertes Lernen geeignet. Die Beschränkung auf eine Aufgabe, gepaart mit bewusstem (!) Umschalten auf andere Situationen, hilft bei der Organisation von Lernprozessen und muss für viele Schülerinnen und Schüler (und inzwischen auch Lehrerinnen und Lehrer) wieder neu gelehrt werden.

An dieser Stelle möchte ich auf eine interessante Beobachtung hinweisen: Obwohl ein „Taschenrechner-Programm” schon immer zur Grundausstattung von fensterbasierten Betriebssystemen gehört, benutzen viele Menschen noch immer einen echten Taschenrechner, der direkt neben dem Computer liegt. Die Erklärung ist einfach: Der Taschenrechner macht genau das, was er soll, und nicht mehr. Möchte man etwas rechnen, so stellt man den richtigen Kontext her, indem man sich genau dieses Gerät nimmt und damit arbeitet. Auf dem Computer ist dieser Kontextwechsel schwierig und wird daher nicht durchgeführt. Auf einem iPad/iPod/iPhone ist dieser Wechsel sehr einfach, und wenn er vollzogen wurde, dann handelt es sich temporär nicht mehr um ein iPad, sondern um einen – Taschenrechner.

### 4.3 Multitouch-Tisch

Eine Zwischenposition nehmen Multitouch-Tische ein. Sie nehmen allein schon durch ihre Position und die damit verbundene schlechtere Sichtbarkeit für größere Gruppen eine Zwit-

[6] Als erster Ratgeber für die konkrete Umsetzung von iPod- oder iPad-Klasen seit die Broschüre *Slide to learn*, erhältlich unter `http://slidetolearn.ning.com`, empfohlen.

[7] Unter `http://teachwithyouripad.wikispaces.com/Blooms%20Taxonomy%20with%20Apps` findet sich eine Liste von Apps, sortiert nach der Bloom'sche Taxonomie.

terstellung zwischen Tafel und persönlichem Gerät ein. Durch die Multitouch-Funktion ist es aber möglich, mit mehreren Kindern gleichzeitig an einem Tisch zu arbeiten.

Bisherige Tische basieren auf Desktop-PCs und bieten somit nicht die Kontext-Wahl wie im vorherigen Abschnitt beschrieben. Weiterhin sind sie keine *personal devices*: Auf die Idee, jedem Kind einen eigenen Tisch zum mitnehmen zu geben, kommt hoffentlich niemand. Tatsächlich sind elektronische Tische dieser Art eher dafür geeignet, den klassischen Gruppentisch im Klassenzimmer zu ersetzen. Es fehlt aber noch vollständig an geeigneter Software um wenigstens die Grundfunktionen (zum Beispiel die Arbeit im Heft) eines klassischen Tischs zu ermöglichen. Wir müssen mit diesen Einschränkungen derzeit leben, es ist aber realistisch auf funktionalere interaktive Tische zu hoffen. Die Überlegungen, die wir dabei auf Kleingerät- und Tafelebene anstellen, lassen sich dabei teilweise übertragen.

# 5 Mathematikdidaktik

Die allgemeinen Beobachtungen aus den letzten Absätzen sind nicht mathematik-spezifisch. Die Gestaltung von Lernumgebungen mit Technologie ist aber nicht rein pädagogisch oder psychologisch zu sehen. *Für den Mathematikunterricht ist ein fachdidaktischer Blick notwendig!*

In den letzten Jahrzehnten ist der Technologieeinsatz in der Mathematikdidaktik auf vielen Ebenen diskutiert und untersucht worden (Laborde & Sträßer, 2010). Dabei entstanden diverse theoretische Ansätze, als nur ein Beispiel sei die *instrumental genesis* von Vérillon & Rabardel (1995) genannt. Hier sehen wir die Mathematikdidaktik als *design science* im Wittmann'schen Sinne (Wittmann, 1995), die uns hilft, Lernen in der Mathematik zu gestalten. Dies sei illustriert an drei Beispielen, die jeweils andere didaktische Einflüsse darstellen.

## 5.1 Multiple Repräsentationen und Repräsentationswechsel

Mathematische Konzepte können meist in verschiedenen Darstellungsformen präsentiert oder verwendet werden. Das Bruner'sche E-I-S-Prinzip mit symbolischer und ikonischer Darstellung sowie enaktiver Manipulation ist hier nur ein Anfang. Man betrachte nur einmal die vielen verschiedenen Möglichkeiten, eine Funktion darzustellen: Mit Worten, als Term, als Wertetabelle, als Graph, als Pfeildiagramm, als Klang oder Melodie,[8] als „colorplot“,[9] als Vor-und-zurück-Bewegung wie im Mathematikum Gießen, …

[8] siehe auch (Anzenhofer, 2012)

[9] eine zweidimensionale Darstellung einer Funktion zweier Veränderlicher, bei der jeder Punkt der Ebene entsprechend dem Funktionswert an dieser Stelle eingefärbt wird (Richter-Gebert & Kortenkamp, 2012).

In (Ladel, 2009) wird die zentrale Rolle von Repräsentationswechseln und der Unterstützung derselben durch den Computer dargestellt. Gerade in der Grundschule, in der Kinder mit einem gewissen Zahlverständnis beginnen und nun die handelnde und die ikonische Ebene mit der symbolischen Darstellung verknüpfen und damit einen ersten Schritt zur Arithmetik und Algebra machen, kann der Computer helfen, die verschiedenen Darstellungen simultan und synchron darzubieten. Dabei kann ein Kind z.B. mit der ikonischen Darstellung arbeiten und mit den virtuellen Darstellungen an der Tafel, dem Tisch oder auf dem iPad interagieren. Die symbolische Darstellung der Handlung wird (je nach Lernsituation automatisch oder auf Anforderung) ebenfalls dargestellt. Legt ein Kind zunächst 8 Plättchen und legt dann 4 weitere dazu, so kann 8+4 angezeigt werden.

Für die Umsetzung im Klassenzimmer betrachten wir wie oben die Tafel, auf die virtuelle Objekte „geklebt" werden können. Eine solche Implementierung haben wir schon in Open-Sankoré gesehen. Der nächste, mathematikdidaktisch motivierte Schritt wäre es, die verschiedenen Darstellungen miteinander verknüpfen zu können. Ein einfaches Beispiel wäre hier die Verknüpfung einer analogen Uhr und einer Digitaluhr. Beide (virtuellen) Objekte können an der Tafel leicht angezeigt werden. Man kann auf der analogen Uhr wie bei einem Pappmodell die Zeiger verdrehen, um verschiedene Zeiten einzustellen. Verknüpft man nun die Digitaluhr mit der analogen Uhr, so zeigen diese ihre Zeiten synchron an, so dass man eine direkte Rückmeldung im Sinne der multiplen Repräsentation erhält.

Prototypisch haben wir bereits solche Umgebungen erstellt. Ein (in unseren Augen) sehenswertes Beispiel ist eine interaktive Stellenwerttafel (Abb. 4, auf der man mit virtuellen Legeplättchen agieren kann. Zusätzlich zur ikonischen Darstellung erhält man noch eine symbolische Darstellung, bei der zum Beispiel das Problem des Übertrags und Umbündelns klar wird, welches bei einer normalen Stellenwerttafel nur mühsam mit viel Wischen zu erklären ist.

### 5.2 Winkelmessung in DGS

Der Winkelbegriff gehört zu den einfach aussehenden, aber sehr schwer zu fassenden Begriffen in der Geometrie. Dies liegt unter anderem an den vielfältigen Möglichkeiten, Winkel und Winkelmaße zu definieren. In den Schulbüchern herrscht hier ebenfalls oft Verwirrung – es wird nicht immer zwischen den Bezeichnungen, den Maßen oder den konkreten Winkel(-feldern) unterschieden, es werden Winkel nur zwischen 0° und 180° betrachtet[10] aber

[10] Im Bildungsplan 2004 für die Hauptschule in Baden-Württemberg steht, dass nur Winkel bis 180° geschätzt werden müssen

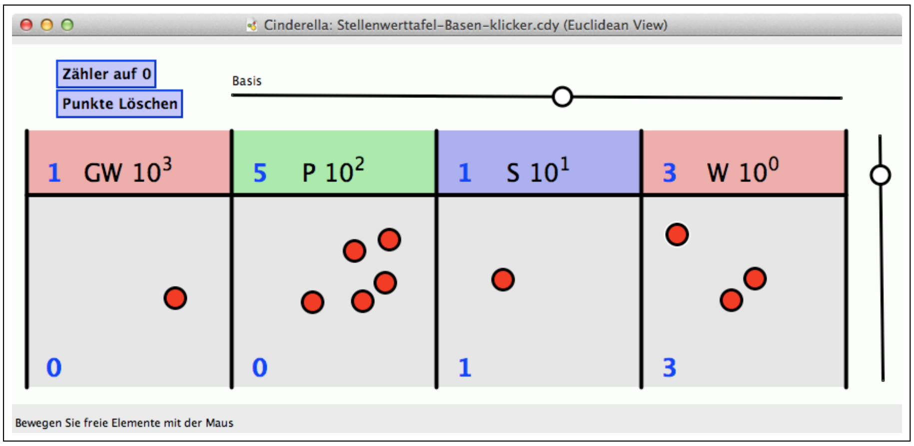


Abbildung 4: Eine interaktive Stellenwerttafel

dann dennoch Summen von Winkelmaßen gebildet, die 360° überschreiten, …

> *Daß es mehrere Winkelbegriffe gibt, ist schon früher zur Sprache gekommen. Manche Didaktiker wollen uns davon überzeugen, daß nur einer der richtige sei. Ordnungsliebe ist lobenswert, aber sie sollte nicht so weit gehen, daß man wichtige Begriffe verbietet, weil sie nicht ins System passen.* Freudenthal (1973)

In einem DGS misst man einen Winkel üblicherweise entweder durch die Auswahl dreier Punkte, die ein Winkelfeld definieren, oder durch die Auswahl zweier Geraden, die sich in einem bestimmten Winkel schneiden. Hierbei wird der Aspekt der *Rotation* um einen Winkel nahezu außer Acht gelassen. Rotation ist kein Konzept, welches sich gut mit Mausbedienung vermitteln lässt. Die Maus übermittelt Translationen in der Ebene an den Rechner, die dann in kartesische Koordinaten umgewandelt werden. Etwas zu drehen ist schwierig: Drehknöpfe, wie sie zum Beispiel an virtuellen Mischpulten eingesetzt werden, werden mit der Maus normalerweise nicht gedreht, sondern eine Auf- und Ab-Bewegung wie bei einem Schieberegler wird automatisch in eine Drehung dieses Knopfes umgesetzt.

Hier hilft es, auf den Begriff der Grundvorstellung zurückzugehen, der in der Geometrie speziell von Bender (1991) beleuchtet wurde und in der Arbeit von vom Hofe (1995) aus vielen (mathematikdidaktischen) Perspektiven untersucht und zusammengefasst wird. Eine Grundvorstellung hilft bei der Anknüpfung an bereits bekannte Handlungen und Vorstellungen, beim Umsetzen in operatives Handeln, und bei der Anwendung in der Realität durch das Erkennen von Strukturen.[11]

Wenn wir uns nun auf Winkel beziehen, so gibt es die Grundvorstellung „Winkel als Rotation", die alle drei Perspektiven der Begriffsbildung unterstützt und somit eine beim Lernenden er-

[11] Siehe dazu (vom Hofe, 1995, S. 97 f.) für eine detaillierte Definition.

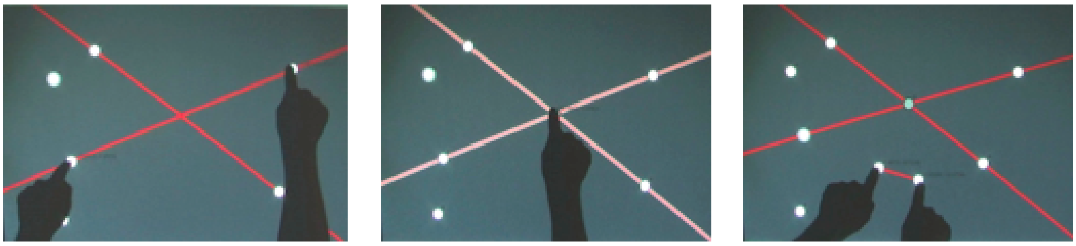

Abbildung 5: Multitouch-Bedienung: Gerade, Schnittpunkt, Strecke

wünschte Vorstellung ist. Diese wird durch das Anklicken dreier Punkte oder zweier Geraden nicht unterstützt, sondern verdeckt. In einer Multitouch-Umgebung ist es durch die erweiterte Eingabemöglichkeit mit mehreren Fingern aber möglich, Rotationen durchzuführen, zum Beispiel indem man mit einem Finger der einen Hand die Rotationsachse festhält und mit einem Finger der anderen Hand eine Rotation um diesen Punkt beschreibt.[12] Auch für weniger komplexe Objekte wie Geraden oder Strecken ist der Zugang über Grundvorstellungen fruchtbar. Eine Gerade wird durch zwei Punkte definiert – dies ist mit der Maus nur sukzessive zu erreichen, im Gegensatz dazu können wir mit zwei Fingern eine Gerade frei bewegen und definieren! Ähnliches gilt für Strecken, nur dass diese endlich sind. Wir transportieren dieses Konzept dadurch, dass eine Strecke zunächst klein beginnt (beide Finger nah beieinander) und dann groß gezogen wird (Abb. 5).

In unserer Arbeitsgruppe arbeiten wir derzeit an der Umsetzung dieser und weiterer Bedienkonzepte für DGS Kortenkamp & Dohrmann (2010). Da es schwierig ist, die dynamische Bedienung in einem gedruckten Artikel zu visualisieren, verweise ich hier auf die entsprechenden Videos auf YouTube.[13]

### 5.3 Rettet die Phänomene

Mit den Worten Wagenscheins oder auch, spezieller für die Mathematikdidaktik, Wittmanns Wittmann (2001) möchte ich das letzte Beispiel überschreiben. Das intuitive Bedienkonzept (man fasst die Dinge, die man sieht, einfach an) des iOS erlaubt uns nämlich, mathematische Phänomene zum Leben zu erwecken und einfach damit zu spielen. Dies ist nicht ganz neu – auf dem Computer wurde der phänomenale Zugang zur Geometrie und Mathematik schon stark belebt. Doch der Zugang ist dort wesentlich umständlicher und nicht so direkt und einladend wie auf einem Tablet-Computer. Als Beispiel sei hier die App *iOrnament* von Jürgen Richter-Gebert (TU München) genannt, mit der sich spielerisch die 17 ebenen kristallographischen

[12]Es ist auch möglich, andere Transformationen durchzuführen – die bekannte *pinch*-Geste zum Zoomen wird oft für Demonstrationen verwendet, bei denen Bilder gleichzeitig gedreht und skaliert werden. Auch projektive Transformationen sind denkbar, aber wohl nicht so intuitiv.

[13]Zum Beispiel `http://www.youtube.com/watch?v=qraL4nIfkbI`

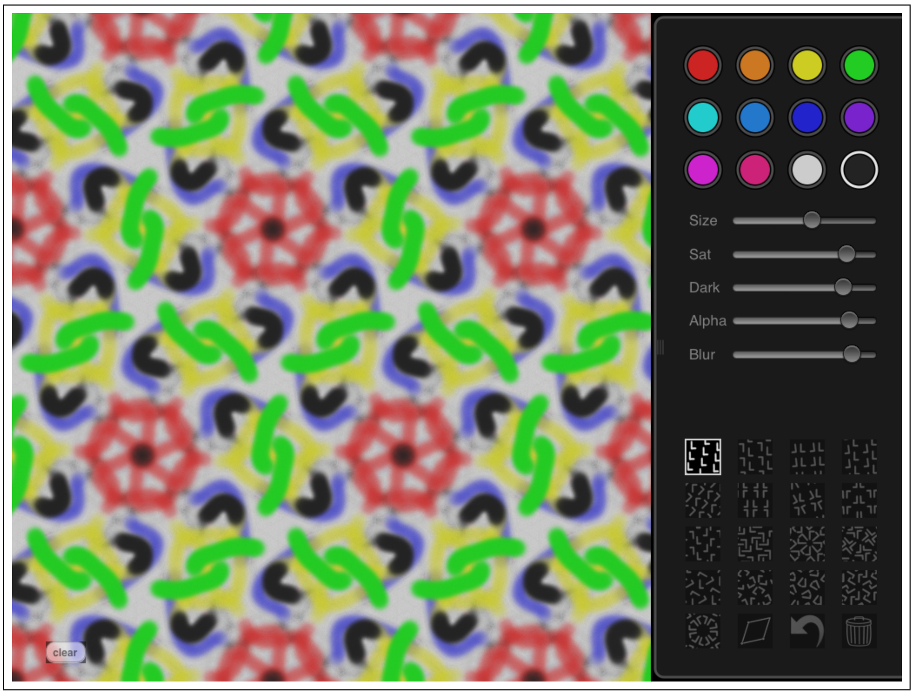


Abbildung 6: Eine Vorabversion von iOrnament von Jürgen Richter-Gebert zum Zeichnen in ebenen kristallographischen Gruppen

Gruppen untersuchen lassen (Abb. 6).

## 6 Fazit

Tafel, Mobiltelefon und Tabletts mit Stift-, Finger- oder Multitouchbedienung sind mehr als nur besonders große oder kleine Computer mit Maus-Ersatz. Wenn wir herausfinden wollen, was man damit wirklich tun kann, so lohnt sich ein Blick in die Mathematikdidaktik – nur so können wir den Mathematikunterricht wirklich bereichern.

## Literatur

Anzenhofer, Stefanie (2012): Musik mit Funktionsgraphen – Wissen kreativ nutzen. In: Kortenkamp, Ulrich & Anselm Lambert (Hg.): Medien Vernetzen / Zur Zukunft des Analysisunterichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge), Hildesheim: Franzbecker

Bender, Peter (1987): Kritik der Logo-Philosophie. Journal für Mathematik-Didaktik, 8

Bender, Peter (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht, erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Postel, Helmut, Arnold Kirsch & Werner Blum (Hg.): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel., Schroedel, 48–60

Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2. Stuttgart: Klett

vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik, Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag

Hoffkamp, Andrea (2011): Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse. Dissertation, TU Berlin, Institut für Mathematik

Kittel, Andreas (2007): Dynamische Geometrie-Systeme in der Hauptschule. Eine interpretative Untersuchung an Fallbeispielen und ausgewählten Aufgaben der Sekundarstufe. Berlin: Franzbecker

Kortenkamp, Ulrich (2004): Experimental mathematics and proofs – what is secure mathematical knowledge? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36(2), 61–66, URL `http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm042a4.pdf`

Kortenkamp, Ulrich (2007): Guidelines for Using Computers Creatively in Mathematics Education. In: Ko, Ki Hyoung & Deane Arganbright (Hg.): Enhancing University Mathematics: Proceedings of the First KAIST International Symposium on Teaching, *CBMS Issues in Mathematics Education*, Band 14, AMS, 129–138, URL `http://www.ams.org/bookstore?fn=20&arg1=cbmathseries&item=CBMATH-14`

Kortenkamp, Ulrich & Christian Dohrmann (2010): User Interface Design for Dynamic Geometry Software. Acta Didactica Napocensia, 3(2), 59–66, URL `http://dppd.ubbcluj.ro/adn/article_3_2_6.pdf`

Kortenkamp, Ulrich & Dirk Materlik (2004a): Geometry teaching in wireless classroom environments using Java and J2ME. Science of Computer Programming, 53(1), 71–85, doi:10.1016/j.scico.2004.02.006, URL `http://kortenkamps.net/papers/2004/wirelessj2me-final.pdf`

Kortenkamp, Ulrich & Dirk Materlik (2004b): Pen-based input of geometric constructions. In: Libbrecht, Paul (Hg.): Proceedings of MathUI 2004, URL `http://kortenkamps.net/papers/2004/Scribbling-article.pdf`

Kortenkamp, Ulrich & Jürgen Richter-Gebert (2004): Using Automatic Theorem Proving to Improve the Usability of Geometry Software. In: Libbrecht, Paul (Hg.): Proceedings of MathUI 2004, URL `http://kortenkamps.net/papers/2004/ATP-UI-article.pdf`

Laborde, Colette & Rudolf Sträßer (2010): Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. ZDM, 42, 121–133, 10.1007/s11858-009-0219-z, URL http://dx.doi.org/10.1007/s11858-009-0219-z

Ladel, Silke (2009): Zur Bedeutung multipler externer Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz für das Mathematiklernen im Anfangsunterricht. Dissertation, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd

Richter-Gebert, Jürgen & Ulrich H. Kortenkamp (2012): The Cinderella.2 Manual – Working with the Interactive Geometry Software. Springer-Verlag

Saltire Software (2008): Geometry Expressions v1.1. URL http://www.geometryexpressions.com/

Vérillon, P. & P. Rabardel (1995): Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology in Education, 9, 77–101

Wittmann, Erich Ch. (1995): Mathematics Education as a 'Design Science'. Educational Studies in Mathematics, 29, 355–374

Wittmann, Erich Christian (2001): Rettet die Phänomene. In: Selter, Christoph & Gerd Walther (Hg.): Mathematiklernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard N. Müller, Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag