

# Virtuell-enaktives Arbeiten mit der „Kraft der Fünf“

(Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp)

Der Übergang von einem ordinalen Zahlkonzept zu einem strukturierten Zahlbegriff fällt manchen Kindern schwer. Wir stellen vor, wie diesen Kindern mit Hilfe des Computers die „Kraft der Fünf“ nähergebracht werden kann. Dabei stellt sich als entscheidender Vorteil heraus, dass die Kinder Fünferpäckchen virtueller Plättchen mit *einem* „Griff“ nehmen können, ohne die Plättchen einzeln abzählen zu müssen, diese aber dennoch auch wieder einzeln gegriffen werden können.

## 1. Zählende Kinder

In der Entwicklung mathematischer Kompetenzen können zwei Entwicklungsstränge unterschieden werden: zum Einen der Erwerb der Reihenbildung (digital-sequenzielles Schema) und zum Anderen der Erwerb von Mengenwissen (räumlich-analoges Schema) (vgl. u.a. RESNICK 1989, FUSON 1992). Die Verknüpfung dieser beiden Schemata, hier insbesondere die Zahlwortsequenz und das Teil-Ganze-Schema, bedeutet für den Anfangsunterricht einen entscheidenden konzeptuellen Fortschritt. Additions- und Subtraktionsaufgaben sind nicht mehr auf das Hinzufügen bzw. Wegnehmen beschränkt (Abb.1 links), sondern können über die triadische Struktur Teil-Teil-Ganzes (Abb.1 rechts) leichter verarbeitet werden (vgl. u.a. RESNICK 1983, GERLACH 2007, GERSTER & SCHULTZ 2000).

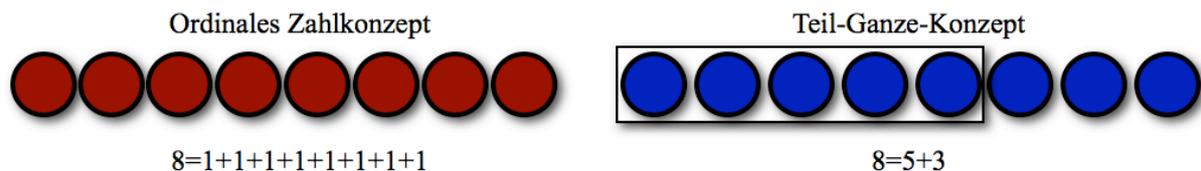


Abbildung 1: Zahlkonzepte

Kinder, bei denen diese Verknüpfung noch nicht ausgebildet ist, lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben weiterhin durch das Hinzufügen bzw. Wegnehmen von Einzelnen und somit zählend. Daher lautet eine Empfehlung für die Gestaltung des Mathematikunterrichts Einsicht in die „Beziehungen zwischen Zahlensätzen anhand visueller Vorstellungen bei gegliederten Quantitäten“ herzustellen und dadurch eine Automatisierung im Bereich der Basisfakten zu erreichen – nicht nur durch mechanisches Auswendiglernen! Hierbei sind das Verdoppeln und Halbieren sowie die Beziehungen der Zahlen zur Fünf und zur Zehn von besonderer Bedeutung (vgl. GERSTER 2003, KRAUTHAUSEN 1995).

## 2. Arbeitsmaterial zur „Kraft der Fünf“

Manchen externen Repräsentationsformen wird auf Grund ihrer adäquaten Passung ein Nutzen für die interne (mentale) Repräsentation zugeschrieben (vgl. KÖRBER 2003). Bei vielen Lehrkräften herrscht häufig immer noch die Annahme vor, dass Grundaufgaben an entsprechendem Anschauungsmaterial nur oft genug gelöst werden müssten, damit das Kind sich „die Aufgabe merkt“ und nicht mehr auf das Zählen angewiesen ist (vgl. GAIDOSCHICK 2003). Die visuelle Wahrnehmung und die Konstruktion adäquater mentaler Vorstellungsbilder ist jedoch ein aktiver Prozess, bei dem die Kinder die Anschauungsmittel individuell deuten (vgl. SÖBEKKE 2005, LORENZ 1998). Wiederholtes Durchführen von Grundaufgaben reicht also nicht aus, sondern das lernende Kind muss dabei unterstützt werden „kraftvollere“ Strategien (Lorenz) als das zählende Rechnen zu finden. Strukturen müssen explizit herausgearbeitet und bewusst im Sinne eines nichtzählenden Lösens von Grundaufgaben genutzt werden. Geeignetes Arbeitsmaterial hierzu sind z.B. das

Zwanzigerfeld mit seiner Unterteilung in vier „Fünfer“ und Wendepfättchen (vgl. WITTMANN 1994) (Abb. 2).

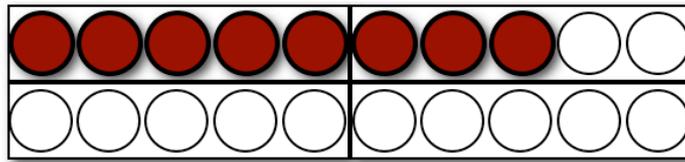


Abbildung 2: Arbeiten mit dem Zwanzigerfeld

Um dieses jedoch sinnvoll zu nutzen muss das Kind die „Ebene strukturorientierter Deutungen mit zunehmender, flexibler Nutzung von Beziehungen und Umdeutungen“ erreicht haben und somit aktiv individuelle und intendierte Strukturen und Beziehungen konstruiert haben (vgl. SÖBEKKE 2005). Doch selbst wenn das Kind wie gewünscht die Fünferstruktur im Zwanzigerstreifen erkannt hat und diese Strukturierung nutzen möchte, so muss es beim enaktiven Arbeiten mit den Pfättchen diese dennoch stets *einzel*n nacheinander auf das Zwanzigerfeld legen. Rechenschiffe bieten hier einen Vorteil, doch auch bei ihnen müssen die Kinder zunächst einen Fünfer füllen, wozu sie die fünf einzelnen Steine erst in die Hand nehmen und dann nacheinander in das Rechenschiff füllen. Die Klassenlehrerin einer ersten Klasse bemerkte hierzu:

*„Ich sage den Kindern ‚versucht immer fünf Stück auf einmal mit der Hand zu nehmen‘, aber das klappt so meistens nicht.“*

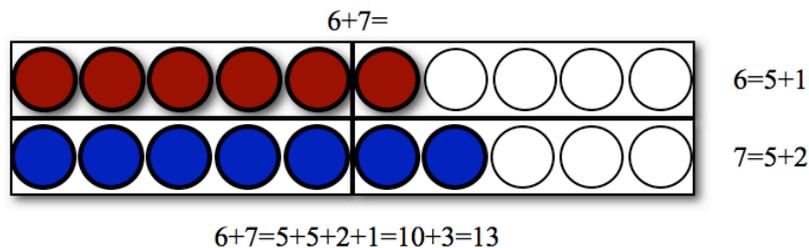
Das zählende Rechnen ist also immer noch der strukturierten Erkenntnis vorangestellt, wenn eine gewünschte Anzahl auf das Zwanzigerfeld gelegt werden soll. Erst im Nachhinein wird dann die Anzahl durch die „Kraft der Fünf“ strukturiert. Aus dieser Beobachtung heraus erwächst der Wunsch nach einer Methode, die Fünferstruktur bereits im Vorfeld beim enaktiven Arbeiten zu betonen.

Ein anderer zu beachtender Aspekt ist die Darstellung der Zehn aus zwei Fünfern. Sowohl zwei *nebeneinander* in einer Reihe gelegte Fünfer als auch zwei Fünfer *untereinander* sind mathematisch sinnvoll und richtig, weshalb vermieden werden sollte, eine der Darstellungsweisen vorzuschreiben (vgl. KRAUTHAUSEN 1995). In der Praxis kann man aber derartige Vorschriften mitunter beobachten, wie z.B. bei der Arbeit von Kindern mit einer Software, bei der die Kinder die Lösung in einem Zwanzigerfeld anklicken müssen (vgl. LADEL 2007):

*S2: „Die obere ist immer 10!“ (S. zeigt auf die obere Reihe)*

*S1: „S., 10 ist eine Reihe, nicht 2 Reihen.“*

Aus diesem Grund ist es sinnvoll, trotz unseres Dezimalsystems auf die Bereitstellung von Zehnerpfäckchen zu verzichten und sich auf Fünferpfäckchen zu beschränken, sodass den Kindern beide Darstellungen möglich sind. Die Aufgabe „ $6+7=$ \_\_“ kann entsprechend wie folgt mit der „Kraft der Fünf“ gelöst werden (Abb. 3):

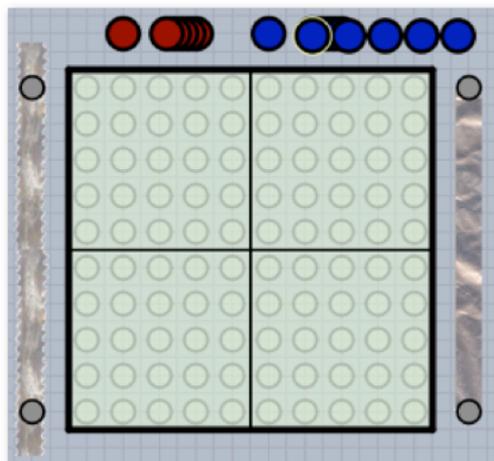


**Abbildung 3: „Kraft der Fünf“**

Das reale Zwanzigerfeld ist also zur ikonischen Strukturierung sehr gut geeignet, enaktiv fördert es jedoch weiterhin das zählende Rechnen. Aus dieser Beobachtung heraus erwächst der Wunsch nach Arbeitsmaterial, bei dem Kinder fünf Dinge auf einmal nehmen können, diese Dinge aber gleichzeitig ihre Individualität als fünf Einzelne behalten. Eine Möglichkeit ist hier der Einsatz von Rechenrahmen, mit dem fünf Perlen mit einem Griff auf die andere Seite geschoben werden. Kinder, die im zählenden Rechnen entsprechend geübt sind, werden jedoch auch hier vorab weiterhin abzählen.

### 3. Virtuell-enaktives Material

Im Rahmen einer Untersuchung zum Umgang von Kindern mit multiplen externen Repräsentationen wurde ein Software-Prototyp namens DOPPELMOPPEL<sup>1</sup> entwickelt (RICHTER-GEBERT & KORTENKAMP 2006). Ziel dieses Programms ist es, durch einen in sämtliche Richtungen möglichen automatisierten intermodalen Transfer zwischen Repräsentationen auf Wunsch der Kinder den Verinnerlichungsprozess zur Operation des Verdoppelns und Halbierens zu unterstützen, sodass die Kinder die symbolische Repräsentation mit einer entsprechenden Handlung verbinden und den Symbolen Bedeutung zuweisen. Hierzu steht den Kindern u.a. folgendes virtuell-enaktives Arbeitsmaterial zur Verfügung (Abb. 4): Eine Arbeitsfläche (der „Tisch“), rote und blaue Plättchen und zwei Werkzeuge zum Verdoppeln und Halbieren. Die Plättchen stehen einzeln oder als Fünferstapel zur Verfügung. Wird der Fünferstapel angeklickt, so sieht das Kind automatisch fünf Plättchen, die es auf einmal auf den Tisch ziehen kann (in Abb. 4 an den blauen Plättchen dargestellt).



**Abbildung 4: Virtuell-enaktives Arbeiten mit der Kraft der Fünf**

Die Fünferstruktur ist somit nicht nur im Nachhinein visuell auf dem strukturierten Feld erkennbar, sondern bereits während des virtuell-enaktiven Legens. Des Weiteren wird die Entscheidung, ob ein einzelnes oder direkt fünf Plättchen genommen werden, bewusst

<sup>1</sup> <http://kortenkamps.net/material/doppelmoppel>

vorangestellt: Das Kind muss im Vorfeld überlegen, ob es ein einzelnes Plättchen oder einen Fünferstapel benötigt, und den jeweiligen Stapel auswählen. Es ist auch nicht möglich, eine andere Wahl außer „1“ oder „5“ zu treffen, die Kinder können nicht einfach „eine Handvoll“ Plättchen greifen und diese abzählen.

In einer Untersuchung mit 28 Erstklässlern, die über einen Zeitraum von fünf Wochen je einmal pro Woche ca. 20 min mit dem Prototyp arbeiteten, wurden nun unterschiedliche Arten der Zahldarstellung beobachtet. Manche Kinder nahmen ausschließlich einzelne Plättchen im Sinne eines ordinalen Zahlkonzepts um Anzahlen darzustellen (z.B.  $6=1+1+1+1+1+1$ ; Ebene konkret empirischer Deutungen), andere setzten Zahlen aus Fünferpäckchen zusammen (z.B.  $6=5+1$ ). Die Nutzung der Fünferpäckchen stand jedoch nicht immer im Zusammenhang mit einem vorteilhafteren Legen, sie wurde auch übergeneralisiert (z.B.  $6=5+5-1-1-1$ ). Auch wenn tendenziell Schwerpunkte in der Art zu Legen beim einzelnen Kind ausgemacht werden konnten, probierten die Kinder im Laufe der Untersuchung verschiedene Arten aus. Basierend auf diesen Erkenntnissen muss nun versucht werden, dieses selbstständige Probieren aufzugreifen und gemeinsam mit den Kindern die Vor- und Nachteile explizit herauszuarbeiten.

#### **4. Die Kinder von einem nicht-zählenden Verfahren überzeugen**

Während im Zahlenraum bis 100 die Vorteile nicht-zählender Rechenstrategien deutlich sind, so fällt es im Zahlenraum bis 20 schwer, geübte Zählkinder von einem anderen Lösungsverfahren zu überzeugen. Die zählende Strategie ist hier erfolgreich genug. Das virtuelle Material kann hierbei aber helfen. So ist die Effektivität der Zahlzerlegung in Fünferpäckchen beim Legen von Anzahlen deutlich spürbar und kann anschließend auch auf der symbolischen Ebene deutlich gemacht werden. So wurde in einer weiteren Untersuchung in einer anderen ersten Klasse den Kindern zunächst erklärt, dass man mit dem Programm einzelne Plättchen, aber auch fünf auf einmal auf den Tisch ziehen kann. Die Kinder probierten dies aus und legten unterschiedliche, von der Lehrkraft vorgegebene, Anzahlen (z.B. 7, 9, 3, 14, 18, 21, 25). War eine Anzahl gelegt, so konnte der Tisch mithilfe eines „Kehrbesens“ schnell leergefegt und für die neue Anzahl frei gemacht werden. Schwächere Kinder legten die Anzahlen – wie bereits in der anderen Untersuchung beobachtet – aus einzelnen Plättchen zusammen, leistungsstärkere nutzten bereits zu Beginn die Fünferstapel. Nach dieser kurzen Einführung von ca. 5-10 Minuten in das Programm galt es die schwächeren Kinder von der „Kraft der Fünf“ zu überzeugen. Hierzu wurde folgende Frage gestellt und gemeinsam bearbeitet:

*„Wie viele und welche Wege findest du 8 Plättchen zu legen? Findest du den kürzesten Weg?“*

Folgende Antworten sind bei der 8 denkbar:

$$8=1+1+1+1+1+1+1+1$$

$$8=5+1+1+1$$

$$8=(5+5)-1-1$$

Die Frage wurde dann mit diversen anderen Anzahlen gestellt und die Lösungen an der Tafel festgehalten. Der Weg mit den wenigsten Mausclicks (als einem von den Schülerinnen und Schülern anerkannten Maß für die Länge des Weges) wurde gesucht und so war es für jedes Kind offensichtlich, dass für einige Zahlen die Nutzung der Fünferpäckchen viel effektiver ist als die Darstellung durch einzelne Plättchen. So legte z.B. ein Junge zu Beginn die „7“ einzeln durch 2 rote, 3 blaue und 2 rote Plättchen, die er anschließend noch einmal einzeln abzählte. Am Ende der Stunde nahm er hierzu einen Fünfer und zwei Einzelne wodurch er

bereits im Vorfeld die 7 in 5 plus 2 zerlegte (Abb. 5).

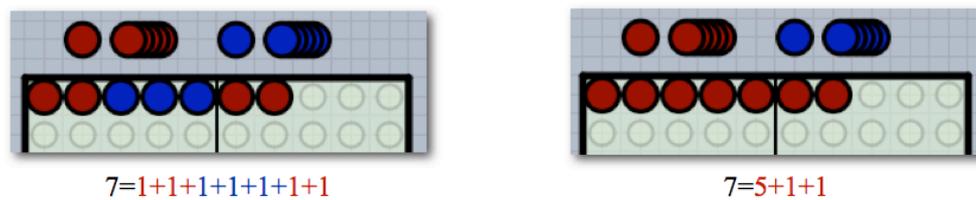


Abbildung 5: Anzahlen legen - vorher und nachher

Die Beschränkung auf Fünferstapel ohne zusätzliche Zehnerstapel erwies sich ebenfalls als sinnvoll, da, wie gewünscht, die Darstellungsweise der Zehn den Kindern überlassen war. Beide Legeweisen, zwei Fünfer übereinander oder nebeneinander, wurden verwendet, und die Kinder benutzten dann auch die Strukturierung des Hunderterfelds in Quadranten:

„Ich mach erst mal das ganze Kästchen voll.“ (S. meint den linken oberen Quadranten)

So kamen u.a. folgende Zahldarstellungen zustande (Abb. 6):

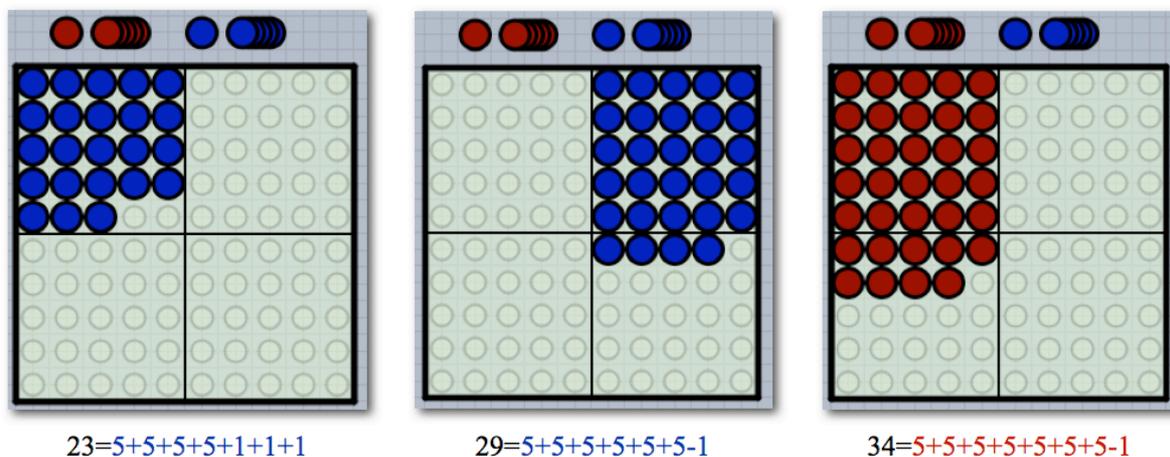


Abbildung 6: Ausgewählte Ergebnisse der Erprobung

## 5. Fazit

Die Realisierung von Fünferpäckchen mit realem Material wie Rechenschiffen oder dem Rechenrahmen ist sinnvoll und soll hier keinesfalls in Frage gestellt werden. Nach unseren Beobachtungen hat das virtuelle Material auf der Grundlage der konkreten Handlungen jedoch einige spezielle Vorteile.

Ohne, dass die Lehrkraft Fünferstapel – egal welchen Materials – vorbereiten muss, können die Kinder deutlich einen zeitlichen Nutzen durch den Gebrauch der Fünferpäckchen spüren. Durch die Verfügbarkeit der beiden Stapel (Einer und Fünfer) sind sie bereits im Vorfeld ihrer Handlung gezwungen, die Zahl zu zerlegen, und somit ihre Handlung bewusst auszuführen. Das Programm ermöglicht es den Kindern, die fünf Plättchen mit einem einzigen Mausklick auf den Tisch zu ziehen, wobei diese einzeln zu sehen sind und anschließend auch einzeln weiterverarbeitet werden können (z.B. beim Entfernen einzelner Plättchen). Im Verlauf von nur einer einzigen Schulstunde konnten wir beobachten, wie Kinder von einer zu Beginn zählenden Zahldarstellung hin zur Zahldarstellung mit Hilfe der „Kraft der Fünf“ wechselten. Hier sehen wir eine große Chance für einen *sinnvollen* Einsatz des Computers bereits im Anfangsunterricht, denn: „Kinder, die Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen denken, können auch nicht-zählend rechnen“ (GAIDOSCHICK 2009).

## Literatur:

- FUSON, K.C. (1992). Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers. In Leinhardt, G., Putnam, R. Hatrup, R.A. (Hg.): *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. 53-187.
- GAIDOSCHICK, M. (2003). Rechenstörungen: Die „didaktogene Komponente“. Kritische Thesen zur „herkömmlichen Unterrichtspraxis“ in drei Kernbereichen der Grundschulmathematik. In: Lenart, F., Holzer, N., Schaupp, H. (Hg.): *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie. Erkennung: Prävention: Förderung*, Leykam, 130-136.
- GAIDOSCHICK, M. (2009). Nicht-zählende Rechenstrategien – von Anfang an! Durch mathematisches Denken zum kleinen Einspluseins. *Grundschulunterricht Mathematik 1/2009*, 4-6.
- GERLACH, M. (2007). Entwicklungsaspekte des Rechnenlernens. Fördermöglichkeiten bei beeinträchtigtem Erwerb mathematische Kompetenzen im Grundschulalter. Duisburg-Essen <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-19876/Diss.Gerlach.pdf> (23.03.2009)
- GERSTER, H.-D. & SCHULTZ R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Freiburg i.B.: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.
- GERSTER, H.-D. (2003). Schwierigkeiten beim Erwerb arithmetischer Konzepte im Anfangsunterricht. In: Lenart, F., Holzer, N., Schaupp, H. (Hg.): *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie. Erkennung: Prävention: Förderung*. Leykam, 154-160.
- KÖRBER, S. (2003). *Visualisierung als Werkzeug im Mathematik-Unterricht: der Einfluss externer Repräsentationsformen auf proportionales Denken im Grundschulalter*. Hamburg: Kovac
- KRAUTHAUSEN, G. (1995). Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. In: MÜLLER, G. & WITTMANN, E.CH. (Hg.): *Mit Kindern rechnen. Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V.* Frankfurt am Main, 87-108.
- LADEL, S. (2007). Erst- und Zweitklässler arbeiten mit ausgewählter Mathematik-Lernsoftware – Eine Untersuchung zum Kommunikationsverhalten und zur Nutzung von softwarespezifischen Hilfen. In: Beckmann, A. (Hg.): *Ausgewählte Unterrichtskonzepte im Mathematikunterricht in unterrichtlicher Erprobung. Band 4*, Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 89-116.
- LORENZ, J.H. (1998). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe
- RESNICK, L.B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. In: Ginsburg, H.P. (Hg.): *The Development of Mathematical Thinking*. Academic Press, 109-151.
- RESNICK, L.B. (1989). Developing Mathematical Knowledge. *American Psychologist*, 44, (2), 162-169
- RICHTER-GEBERT, J., KORTENKAMP, U. (2006). *The Interactive Geometry Software Cinderella*, version 2.0. URL: <http://cinderella.de> (23.03.2009)
- SÖBEKKE, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker
- WITTMANN, E.Ch. (1994). Legen und Überlegen. Wendeplättchen im aktiv-entdeckenden Rechenunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, 72/1994, 44-46.

Silke Ladel ist Diplompädagogin und als abgeordnete Grund- und Hauptschullehrerin an der Pädagogischen Hochschule in Schwäbisch Gmünd tätig. Tel. (0 71 71) 963 456, E-Mail: [silke.ladel@ph-gmuend.de](mailto:silke.ladel@ph-gmuend.de)

Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp ist Professor für Medieninformatik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd. Tel. (0 71 71) 983 461, E-Mail: [kortenkamp@cinderella.de](mailto:kortenkamp@cinderella.de)

Postanschrift: Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Oberbettringer Str. 200, D-73525 Schwäbisch Gmünd