STEIN FÜR STEIN

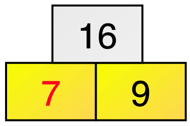

Abb. 1

Mauern bauen - Strukturen erkennen

Weitere Lernchancen durch den Einsatz von echten Bausteinen beim Bauen von Zahlenmauern

Ulrich Kortenkamp, Christiane Winter, Johanna Zöllner

Üblicherweise wird das Aufgabenformat „Zahlenmauern“ in Papierform dargeboten. Schon so ergeben sich für Grundschülerinnen und Grundschüler vielfältige Möglichkeiten, Mathematik als Strukturwissenschaft zu betreiben. Wir beschreiben, wie die Verwendung von echten Bausteinen diese vertiefte Beschäftigung mit Mathematik noch verstärken kann und geben Beispiele für unterstützende Aufgaben.

Die Grundidee

Zahlenmauern, in Deutschland erstmals bekannt geworden durch das Handbuch produktiver Rechenübungen (Wittmann & Müller 1990), sind ein besonders reichhaltiges Übungsformat für die Addition und Subtraktion in der Grundschule. Krauthausen (1995) und Selter (2004) identifizieren hier ein substanzielles Übungsformat aufgrund der vielfältigen Lernchancen, die sich dabei bieten.
Zahlenmauern bestechen durch ihre Einfachheit. Eine einzige Regel genügt: Bedeckt ein Stein (ein „Deckstein“) zwei benachbarte Steine, so steht auf diesem die Summe der Werte der beiden Nachbarsteine (Abb. 1).

Didaktische Überlegungen

Interessant und didaktisch sinnvoll werden die Zahlenmauern vor allem dann, wenn die Kinder Strukturen erkennen und nutzen.
Die Lehrkraft kann den Impuls für vertieftes mathematisches Denken und Lernprozesse in der Grundschule zum Beispiel durch einfache Fragen geben:

- „Was passiert, wenn ein Grundstein um eins verändert wird?“
- „Was passiert, wenn man zwei Grundsteine vertauscht?“
- „Gibt es eine Zahlenmauer mit gleichen Zahlen in einer anderen Anordnung?“

Dies sind nur einige Impulse, die Kinder dazu anregen sich über das reine Ausrechnen hinaus forschend mit diesem Aufgabenformat zu beschäftigen. Im Austausch über verschiedene von den Kindern entdeckte Strukturen können sie ihre eigenen Entdeckungen darstellen und die Sichtweisen anderer Kinder kennen lernen und nachvollziehen. So findet ein Lernen von- und miteinander statt.

Mathematischer Hintergrund

Veranschaulicht man sich die Struktur der Zahlenmauern mit algebraischen Mitteln, dann wird schnell sichtbar, welche Auswirkung die einzelnen Veränderungen haben können (Abb. 2). Ein interessantes Detail: Der Beitrag jedes Grundsteines zum Wert des Zielsteines entspricht der Anzahl der aufsteigenden Wege von diesem Grundstein zum Zielstein. Es gibt in der Mauer in Abbildung 2 genau vier aufsteigende Wege vom Stein „b“ zum Zielstein: Wenn wir „r“ für „diagonal nach rechts oben“ und „l“ für „diagonal nach links oben“ setzen, dann lauten sie l-r-r-r, r-l-r-r, r-r-l-r und r-r-r-l. Aus dieser Überlegung ergibt sich der Summand „4b“ in der Formel für den Wert des Zielsteins. Für „6c“ lauten die Wege l-l-r-r, l-r-l-r, l-r-r-l, r-l-l-r, r-l-r-l und r-r-l-l. Das Operieren auf dem algebraischen Niveau ist für die Schülerinnen und Schüler in der Grundschule noch nicht möglich, sie können aber die notwendigen Vorerfahrungen im Umgang mit Zahlenmauern sammeln und sogar schon auf präformalem Niveau argumentieren, zum Beispiel über Punkte als Repräsentanten, die sich über die oben beschriebenen Wege fortsetzen (Kopp 2001).

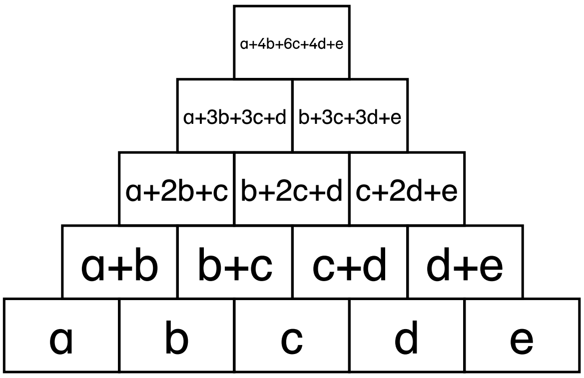

Abb. 2

Sinnvolles Arbeitsmaterial für Zahlenmauern
Das Experimentieren auf dem Papier kann unter „Was wäre, wenn?“ – Fragestellungen an Grenzen stoßen. Oft zieht es Radieren und Korrigieren nach sich, was für manche Grundschulkinder sehr mühsam ist und den oft vorhandenen Wunsch nach Ordnung und Ästhetik stört.
Zahlenmauern aus echten Bausteinen, bieten einige Vorteile, die hier vorgestellt werden sollen. Die von uns eingesetzten Zahlenmauer-Bausteine sind aus handelsüblichen Steckbausteinen mit jeweils vier Noppen hergestellt und auf einer Seite mit einer Zahl bedruckt.
Um das Arbeiten an sinnvollen und einsichtsvollen Aufgaben zu ermöglichen, haben wir insgesamt 230 Bausteine bereitgestellt (Abb. 3). Dabei kommen oft benötigte Zahlen (zum Beispiel im Zahlenraum bis 20) häufiger vor. Die größte Zahl ist die 128, die als oberster „Zielstein“ in einer 7er-Mauer (Höhe: 7 Reihen) mit Einsen als Grundsteinen, dem Fundament, erreicht werden kann.
Eine Zahlenmauer aus Bausteinen lässt sich schnell und unkompliziert zusammenstecken, wieder auseinander nehmen und ergänzen. Es besteht die Möglichkeit, schnell und unkompliziert zu korrigieren: Das Ändern bzw. Austauschen eines Bausteins erfordert nicht, wie auf Papier, dass die gesamte Mauer neu geschrieben wird. Teilmauern, die sich nicht verändern, können als Ganzes übernommen werden. Mauerteile können herausgelöst und zu neuen schlüssigen Mauern ergänzt werden. Die Auswirkungen einer solchen Änderung werden hierbei gut sichtbar, man erkennt welche Bausteine von einer Änderung betroffen sind und verändert werden müssen.

Abb. 3

Beschränkungen als neue Herausforderung
Bei Zahlenmauern auf Papier stehen alle Zahlen unbeschränkt zur Verfügung. Braucht man noch eine 109, so schreibt man sie einfach hin. Sind hingegen Zahlen nur in beschränktem Vorrat vorhanden können neue Herausforderungen entstehen („Not macht erfinderisch!“), die Kinder dazu anregen, über Strukturen nachzudenken. Hier fehlte der Baustein 109, eine Schülerin löste das Problem wie in Abbildung 4 dargestellt. Sie geht hier über das vorgegebene Format hinaus und beweist gleichzeitig ein sicheres Verständnis des Stellenwertsystems.

Abb.4

Eine andere Lösung wäre z.B. eine Nachbarzahl wie die Zahl 108 zu erreichen, die tatsächlich vorhanden ist. Dazu könnte die Schülerin nun zuerst eine der beiden Zahlen in der 5. Reihe verändern (61 oder 48) und dann sukzessive am Rand immer weiter nach unten die Zahlen der Bausteine am Rand um 1 verringern. Hier hätte sie sehr schnell gemerkt, wie sich eine Änderung durch das gesamte Format fortsetzt. Kleine Veränderungen können weitreichende, aber strukturierte Folgen haben.

Verschiedene Aufgaben – Verschiedene Denkweisen

Mauern anbauen
Die Kinder werden aufgefordert an eine Mauer anzubauen. So soll z.B. aus einer 3er-Mauer eine 4er-Mauer werden (Abb. 5).
Beginnt man mit einem Grundstein (z.B. der 2), so sind die drei folgenden Steine festgelegt, da die drei Steine auf der „Anbaudiagonale“ (3, 7, 13) die gesuchte Summe und damit die Differenzen vorgeben. Bei welchem Stein landet man? Das kann man ausprobieren, aber auch ausrechnen: 3+7+13 = 23, also trifft man mit Grundstein 2 die 23+2 = 25. Wechselt man von 2 auf 4, so erhält man statt (2, 5, 12, 25) als Anbaumauer die Folge (4, 7, 14, 27).
Betrachten wir dies vom höheren Standpunkt der Oberstufenmathematik aus so sehen wir hier schon die Vorbereitung von Differenzenfolgen und damit der Differenzial- und Integralrechnung. (3, 7, 13) ist die „Ableitung“ von (2, 5, 12, 25), aber auch von (4, 7, 14, 27), umgekehrt ist (3, 7, 13) eine Art „Stammfunktion“ zu beiden Anbaumauern.

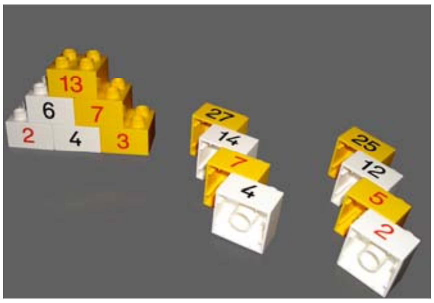

Abb. 5

Mauern nachbauen
Die konkreten Bausteine laden zum gemeinsamen Bauen ein und wirken damit der zunehmenden Einzelarbeit durch die Abarbeitung von Wochenplänen entgegen.
Bestimmte Aufgabenformate können dies noch unterstützen: So kann man zum Beispiel in Partnerarbeit jedes Kind frei eine Mauer bauen lassen. Die Mauern werden kurz notiert und wieder auseinander genommen. Anschließend tauschen die Partnerkinder die verwendeten Bausteinsätze untereinander aus. Jedes Kind soll nun die Mauer des Partners oder der Partnerin nachbauen. Die auf Papier notierte Mauer dient als Kontrolle.
Diese scheinbar einfache Aufgabe kann große Anforderungen an die Kinder stellen, vor allem wenn die Zahlen recht nah beieinander gewählt werden.

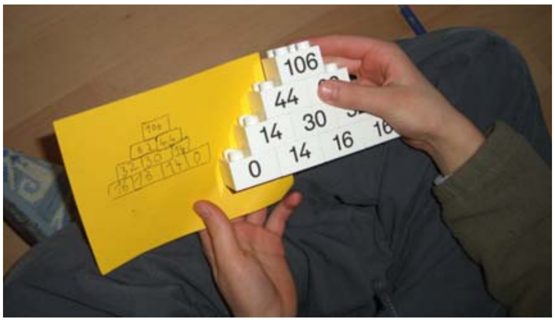

Abb. 6

Die Schülerin, die in Abbildung 6 eine Zahlenmauer nachbaut und anschließend mit der ursprünglich gebauten Mauer vergleicht, hatte weniger Kombinationsmöglichkeiten als die Schülerin in Abbildung 7, die zwischendurch schon aufgeben wollte.

Abb. 7

Die Kinder müssen Strategien entwickeln, um alle vorgegebenen Bausteine wieder zu einer Mauer zusammenzusetzen. Anschließend vergleichen die Kinder die Ergebnisse mit den Original-Mauern. Ist aus dem Bausteinsatz wieder die gleiche Mauer entstanden? Gibt es Unterschiede? Welche?
Es können mathematische Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten deutlich werden. Symmetrische Vertauschungen von Bausteinen können diskutiert werden, und Kinder können entdecken und formulieren, dass zwei Summanden vertauscht werden können, ohne dass sich das Ergebnis ändert – das Kommutativ-Gesetz, wie es bei der nachgebauten Mauer in Abbildung 6 deutlich wird.
Die Höhe der zu rekonstruierenden Mauern spielt eine große Rolle für den Schwierigkeitsgrad und unterstützt dadurch die Binnendifferenzierung. Eine Mauer der Höhe 2 ist trivial zu rekonstruieren. Eine Mauer der Höhe 3 hat meist nur zwei verschiedene Rekonstruktionen (die Spiegelung der kompletten Mauer ist stets eine Alternative). Bei einer Mauer der Höhe 4 treten bereits kompliziertere Vertauschungsmöglichkeiten auf. Vor allem wird deutlich, dass die Grundsteine nicht immer diejenigen mit den kleinsten Werten sein müssen. Mauern der Höhe 5 sind dann schon etwas für echte Profis!

Kombinieren und Konkurrieren
Die gerade angesprochenen Vertauschungen liefern eine Fülle von Anreizen. Solche „Forscheraufträge“ verlangen nach einem tieferen Verständnis, das über die reine Addition und Subtraktion hinausreicht.

- Wie viele verschiedene Zahlenmauern können aus einer festgelegten Menge von Bausteinen gebaut werden?
- Welche Kombinationen von Bausteinen geben viel Freiheit, welche wirken beschränkend?
- Gibt es Zahlenmauern, die man nur auf eine Art rekonstruieren kann?
- Wie hoch ist die höchste Mauer, die sich bauen lässt?

Diese Entdeckungsreisen können in Forscherheften (Steinweg 2001) dokumentiert werden, so dass die Kinder eine Diskussionsgrundlage und eine Dokumentation für gemeinsame Auswertungsphasen („Mauerkonferenzen“) haben.

Zahlenwände
Die zuvor beschriebene Beschränkung der Zahlen, die den Blick auf Strukturen lenken kann, kommt auch im Forscherauftrag „Zahlenwände“ zum Tragen: Eine Zahlenwand ist wie eine Zahlenmauer aufgebaut, nur wird sie nicht vollständig bis zum obersten Zielstein hinauf gebaut,

sondern auf einer bestimmten Höhe abgeschnitten. Eine Zahlenwand der Höhe 4 kann beliebig breit sein. Möchte man nun eine möglichst breite Zahlenwand bauen, so fehlt es irgendwann an den erforderlichen Bausteinen. Ohne vorherige Planung kommt es schnell zum Baustopp... Nun ist Nachdenken und Problemlösen gefragt! Beispiel: Bei der Zahlenwand wird der Grundstein 2 angebaut. Leider steht aber der benötigte Baustein 54 für die oberste Reihe nicht mehr zur Verfügung. Nun ergeben sich zwei Herangehensweisen, um erfolgreich weiterzubauen: Entweder werden andere mögliche Grundsteine (3, 4, 5, …) ausprobiert (probierendes Lösen) oder man wählt zu noch verfügbaren Deckbausteinen passende Grundsteine aus. So könnte zum Deckstein 60 der Grundstein 8 verbaut werden. Schritt für Schritt entwickeln die Kinder Strategien, die Rest-Bausteine möglichst effizient und effektiv einzusetzen.
Dabei sind die Kinder erfahrungsgemäß sehr motiviert, möglichst viele Bausteine zu verbauen.

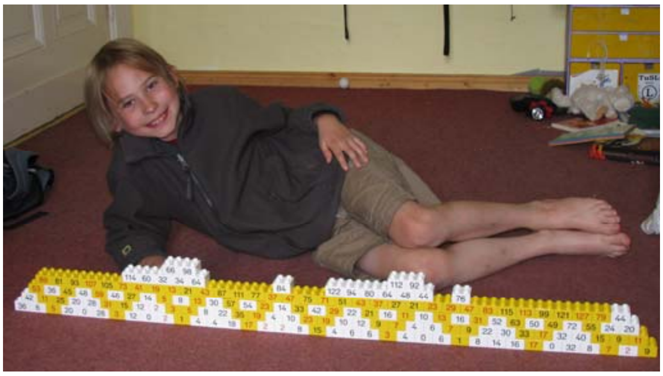

Abb. 8

Zur Gestaltung der Bausteine

Die Bausteine wurden bewusst schlicht gehalten, um nicht durch wilde Farbmuster die Konzentration auf das Wesentliche zu stören. Zwei Farbunterschiede gibt es: Die ungeraden Zahlen sind auf gelben Bausteinen, die geraden auf weißen Bausteinen gedruckt. Primzahlen sind rot. Diese sind zwar für viele Kinder noch nicht relevant, aber sie können schon erkennen, dass an diesen Zahlen nicht nur die Farbe besonders ist.
In den von uns formulierten Forscheraufträgen (Kortenkamp 2009) werden die Primzahlen nur einmal aktiv einbezogen. Dabei werden die Kinder aufgefordert, eine Zahl auszuwählen und die Bausteine von 1 bis zu dieser Zahl in der Form eines Rechtecks aufzubauen. Ein echtes Rechteck gelingt dabei nur, wenn es sich nicht um eine Primzahl handelt.
Auf diese Art kann spielerisch ein Einstieg in spannende Fragen zu den ganzen Zahlen gefunden werden – z.B. warum ist die 2 die einzige rote Zahl auf weißem Grund? – und somit ein kreativer Zugang zur Mathematik geöffnet werden (Steinweg & Klein 2001).

Fazit

► Greifbare Zahlenmauern stellen tatsächlich einen Mehrwert gegenüber der klassischen Variante auf Papier dar. Die vielfältigen Mathematik-Anlässe, die sich beim geschickten Einsatz der traditionellen Mauern im Unterricht ergeben, sind eingebaut; durch die einfache Handhabung der Bausteine, durch ihre beschränkte Anzahl und ihre farbliche Gestaltung bieten sie darüber hinaus weitere Möglichkeiten Mathematik zu betreiben.
► Die Kinder können auf verschiedenen Niveaus mit Zahlenstrukturen arbeiten und mathematische Zusammenhänge entdecken.
► Das Arbeiten mit den Bausteinen macht Spaß – probieren Sie es selbst!
► Zahlenmauer-Bausteine lassen sich entweder mit bedruckter Klebefolie oder durch Beschriften mit Permanent-Markern selbst herstellen. Im Handel gibt es vorgefertigte Sets mit fertig bedruckten, farbigen Bausteinen und einem umfangreichen Praxisbuch, das Forscheraufträge, ein Regelplakat und blanko Kopiervorlagen enthält (Bezugsquelle siehe http://kortenkamps.net/zahlenmauern).

Literatur

KOPP, M.: Algebra mit Zahlenmauern. In: mathematik lehren (2001) 105, 16-19
KORTENKAMP, U.: Lernbausteine Zahlenmauern. (2009). 230 Bausteine mit Begleitmaterial. http://kortenkamps.net/zahlenmauern. München: Terzio
KRAUTHAUSEN, G.: Zahlenmauern im zweiten Schuljahr – ein substantielles Übungsformat. In: Grundschulunterricht 42 (1995) 10, 5-9
SELTER, C.: Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten, Sinus Grundschule, Basispapier zum Modul 2: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule, 2004, http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/Materialien/Modul2.pdf (20.1.2011)
STEINWEG, A. S.: Tim zeigt uns die Mathematik. In: Grundschulunterricht 48 (2001) 4, 14-18
STEINWEG, A. S. & KLEIN, J.: Mathematikunterricht über das 1+1 hinaus - Förderung der Kreativität in der Grundschule. In: mathematik lehren 106 (2001) 9-13
WITTMANN, E. C. & MÜLLER, G.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1, Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart, 1990