

Ulrich KORTENKAMP, Berlin

Visage - Visualisierung von Graphenalgorithmen¹

Diskrete Mathematik im Unterricht

Diskrete Mathematik, insbesondere kombinatorische Optimierung, wird in den letzten Jahren immer mehr als ergiebiges Thema für den Unterricht entdeckt. Die Modellierung von Alltagsproblemen durch Graphen wird unter anderem durch ihre visuelle Komponente als erfrischende Alternative zum üblichen Hantieren mit Formeln gesehen. Dennoch fehlt dem Thema nicht die mathematische Tiefe – im Gegenteil, als ernst zu nehmender Zweig sowohl der angewandten und reinen Mathematik beherbergt die Diskrete Mathematik einige der härtesten Probleme der Mathematik. Die hohe wirtschaftliche Relevanz sorgt zudem für eine nicht nur vorgetäuschte, sondern wahrhaftige Realitätsnähe.

Eine Motivation aus der Physik

Das Thema Graphen ist aber nicht nur als Abstraktion von (geometrischen) Zusammenhängen zu sehen. Ein schöner, handlungsorientierter und fächerübergreifender Einstieg nutzt Stabmagnete und Stahlkugeln:² Mit diesen kann man dreidimensionale Objekte bauen. Die (zunächst unmagnetischen) Stahlkugeln werden hierbei durch die anliegenden Stabmagnete magnetisiert. Liegt die gleiche Anzahl von Nord- und Südpolen an einer Kugel an, so wirkt diese aber nicht magnetisch auf eine daran gehaltene weitere Stahlkugel. Fasst man nun die Kugeln und Stäbe als Ecken und Kanten eines Graphen auf, so kann man alle Ecken genau dann unmagnetisch halten, wenn der Graph eine Euler-Tour zulässt, also eine Rundtour, die alle Kanten genau einmal besucht.



Abbildung 1: Ein Oktaeder aus Supermagneten

Die Visage-Erweiterung von Cinderella

Graphen sind von Natur aus geometrische Gebilde. Daher liegt es nahe, diese mit Geometrie-Software zu behandeln.³ Im Projekt „G6 – Visualisie-

¹ Das Projekt Visage wird als Teilprojekt G6 des DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“ von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert.

² Siehe <http://kortenkamp.net/supermagnete>.

³ Das DGS Cabri hat sogar seinen Ursprung als Werkzeug zum Umgang mit Graphen. Diese Wurzeln sind aber leider nicht mehr zu erkennen.

rung von Algorithmen“ des DFG-Forschungszentrum MATHEON wird hierzu eine Erweiterung namens „Visage“ der Geometrie-Software Cinderella geschaffen, mit der in gewohnter Arbeitsumgebung Graphen gezeichnet und mit Eigenschaften wie Kantengewichten versehen werden können. Auf diesen Graphen können dann Algorithmen schrittweise oder fortlaufend abgearbeitet werden, so dass die Modellierung direkt in die Anwendung übernommen werden kann. Durch Hintergrundbilder kann ein zusätzlicher Realitätsbezug geschaffen werden.

Bisher wurden Algorithmen für Tiefen- und Breitensuche, kürzeste Wege, Netzwerkflüsse und bipartite Paarungen (*matchings*) implementiert. Zur Einführung von Graphen eignen sich die Visualisierungen von Adjazenzmatrizen zu gerichteten und ungerichteten Graphen. Die Erweiterung wurde so angelegt, dass mit wenig Aufwand weitere schulrelevante Algorithmen hinzugefügt werden können.

Da Visage direkt an Cinderella angebunden ist, können auch spezielle Leistungsmerkmale des DGS mit verwendet werden. Dies gilt insbesondere für die Erweiterungssprache CindyScript, eine funktionale Programmiersprache, mit der das Verhalten von Konstruktionen und Zeichnungen leicht an die speziellen Gegebenheiten (Lerngruppe, Vorwissen, didaktische Reduktion) angepasst werden kann. Weiter unten beschreiben wir ein Beispiel für die Verwendung der Scriptsprache.

Weiterhin können mit Visage elektronische Arbeitsblätter für den Unterrichts- oder Nachmittagseinsatz erstellt werden, die ohne weitere Softwareinstallation direkt im Internet-Browser ablaufen.

Informationen zu Visage sind unter <http://cinderella.de/visage> abrufbar.

Wie fährt die Müllabfuhr? Ein Einsatzbeispiel.

Eine mit Visage erstellte Beispielsequenz wurde in einer 8. Klasse einer Hauptschule ausprobiert. Sie ist im Internet unter <http://kortenkamp.net/material/EulerTour> verfügbar.

Die zentrale Fragestellung ist die optimale Fahrt eines Müllwagens. Dieser sollte durch jede Straße mindestens einmal fahren; wenn es möglich ist, dass er sogar *genau einmal* durch jede Straße fährt, dann ist die Routenplanung optimal. Die Frage, ob eine solche optimale Tour möglich ist, ist das durch Euler bekannte Königsberger Brückenproblem, eine solche Tour heißt daher auch Euler-Tour.



Abbildung 2: Ein Müllwagen in Berlin



Abbildung 3: Ein elektronisches Arbeitsblatt zu Euler-Touren in Graphen. Zu sehen ist die Modellierung auf einem Stadtplan sowie eine in rot gezeichnete "Problem-Kante".

Die Schülerinnen und Schüler können zunächst auf einem Stadtplan ihres Heimatortes, der als Hintergrundbild in ein interaktives *Applet* eingebildet wird, die Modellierung des Straßennetzes durch einen Graphen selbst durchführen. Mit der Maus zeichnen sie Knoten und Kanten – andere Objekte werden nicht angeboten. Durch diese bewusste Einschränkung ist sicher gestellt, dass tatsächlich ein abstraktes Modell und nicht eine weitere Zeichnung erstellt wird. Auf diesem Graphen können die Schülerinnen und Schüler dann einen Algorithmus zum Finden von Euler-Touren ablaufen lassen. Gibt es eine Euler-Tour, so wird sie Schritt für Schritt angezeigt, gibt es keine, so wird über eine rote Markierung angezeigt, dass es an einer Stelle im Graphen ein (nicht näher spezifiziertes) Problem gibt.

Weitere elektronische Arbeitsblätter stehen für das Arbeiten mit abstrakten Graphen (also ohne Stadtplan-Einblendung) und das Ergänzen von gegebenen Graphen zu Graphen mit Euler-Tour zur Verfügung.

Argumente für den Einsatz des Computers

Es bleibt zu beantworten, wo der spezifische Nutzen des Computers gerade im Gebiet Graphenalgorithmen liegt. Auf der Hand liegt, dass das Vorfüh-

ren von Algorithmen mit dem Computer leichter fällt; außerdem können die Schülerinnen und Schüler so auch schnell und ohne weitere Intervention der Lehrkraft „eigene“ Graphen untersuchen. Dies demonstriert unmittelbar den Nutzen einer algorithmisch geeigneten Modellierung und macht sie erlebbar.

Die Verdeutlichung, dass ein Graph nicht eine Zeichnung ist, sondern die kombinatorische Struktur, die Knoten über Kanteninzidenzen miteinander in Beziehung setzt, wird durch die Einschränkung auf ganz bestimmte „Zeichenwerkzeuge“ erreicht. Arbeitet man hier mit Stift und Papier, so muss – zusätzlich zur eigentlichen Durchdringung des zu modellierenden Problems – darauf geachtet werden, dass das gezeichnete Bild auch wirklich einen Graph darstellt.

Zuvor haben wir bereits angesprochen, dass Visage mit weiteren Merkmalen des zugrunde liegenden DGS kombiniert werden kann. Im oben angeführten Beispiel haben wir davon Gebrauch gemacht: Die gezeichneten Graphen zeigen ihre Knoten in schwarz oder weiß an, je nachdem ob ihr Kantengrad gerade oder ungerade ist. Diese Hinweise erleichtern das Entdecken des Kriteriums, ob ein Graph eine Eulertour hat oder nicht: Sind alle Knoten weiß, so gibt es eine Eulertour, sonst nicht. Das Verbalisieren dieser Eigenschaft ist einfacher als die Beschreibung über die Valenz der Knoten, und führt dennoch zu der gleichen Erkenntnis. Damit ist der Computer hier eine Hilfe gerade für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler.

Zusammenfassung und Danksagungen

Die Visage-Erweiterung erschließt ein neues Feld für den Einsatz neuer Medien im Mathematikunterricht. Zusätzlich zu den Standardanwendungen DGS, CAS und Tabellenkalkulation ist nun auch eine Behandlung von Algorithmen der diskreten Mathematik möglich. Diese werden in eine gewohnte Umgebung eingebunden, die zudem als Autorenwerkzeug zur Erstellung eigener elektronischer Arbeitsblätter benutzt werden kann.

Nach der Erprobungsphase in der ersten Hälfte des Jahres 2005 werden wir Lehrerfortbildungen durchführen, damit diese neuen Möglichkeiten auch von Anfang an im Unterricht ausgenutzt werden. Hier können wir parallel zur Einführung der Diskreten Mathematik in die Lehr- und Rahmenpläne (beispielsweise als Wahlthema im zukünftigen Berliner Rahmenlehrplan) arbeiten.

Großer Dank geht an die Projektmitglieder Anne Geschke, Brigitte Lutz-Westphal und – hauptverantwortlich für die Implementierung von Visage – Dirk Materlik.