Ulrich KORTENKAMP, Freie Universität Berlin
Kontinuität in Dynamischer Geometrie

1 Neue Möglichkeiten durch DGS

Allgemein werden die neuen didaktischen Chancen durch den Einsatz von Dynamischer Geometrie-Software (DGS) als recht vielversprechend eingeschätzt, obgleich die empirische Verifikation noch unzureichend ist. Erste Versuche haben aber gezeigt, dass gerade das Entdecken und Forschen durch DGS gefördert wird (siehe z.B. [Heintz00]).

2 Kontinuität als Notwendigkeit

Im Folgenden möchte ich verdeutlichen, was Kontinuität in DGS darstellt und warum sie ein erstrebenswertes Ziel darstellt.

Selbst wenn man sich auf elementare Objekte (Punkte, Geraden, Kreise) und Grundkonstruktionen (Verbindungsgerade, Schnittpunkt, Kreis durch Mittel- und Randpunkt) beschränkt, treten bei Computersoftware die einen *Zugmodus* unterstützt Effekte auf, die beim Arbeiten mit Papier, Bleistift, Zirkel und Lineal nicht auftreten. So kann beispielsweise ein nachträgliches Verschieben von Basispunkten erzwingen, dass ein zuvor vorhandener Schnittpunkt, von dem weitere Konstruktionselemente abhängen, ins "Unendliche" verschoben wird oder, als Schnittpunkt zweier sich nicht schneidender Kreise, verschwindet.

Dieses Verhalten wird für den schulischen Gebrauch im allgemeinen akzeptiert. Durch die Einführung komplexer Koordinaten in der Projektiven Ebene kann es allerdings vollständig eliminiert werden [RiGeKor99b].

Ein wesentlich größeres Problem welches nicht nur im universitären Bereich relevant ist, ist die automatische Zuordnung mehrdeutiger Lösungen im Zugmodus. Als Beispiel seien hier die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden genannt: Zum Zeitpunkt der Definition des Schnittpunktes ist die Auswahl klar durch den Benutzer am Bildschirm festgelegt.

Wird danach im Zugmodus die Gerade oder der Kreis verändert, so muss die DGS den korrekten Schnittpunkt automatisch korrekt mitverfolgen um Kontinuität zu erreichen. Hierbei entspricht der Begriff der Kontinuität dem der Stetigkeit (eine sinnvolle Topologie vorausgesetzt). Informell gesprochen sollen kleine Änderungen der Eingangsparameter (Basispunkte) nur kleine Änderungen der Ausgangsparamter (abhängige Elemente) hervorrufen.

Dieses Ziel ist technisch nicht offensichtlich zu erreichen, da die Schnittpunkte zwei völlig gleichberechtigten Lösungen einer quadratischen Gleichung entsprechen. Heuristische Ansätze, wie sie in herkömmlichen DGS benutzt werden, basieren zumeist auf Orientierung der Kreise und Geraden. Diese Heuristiken garantieren für viele Fälle ein kontinuierliches Erscheingsbild, aber, wie später gezeigt wird, scheitern sie teils auch schon bei elementaren Konstruktionen, die in der Sekundarstufe I relevant sind.

2.1 Historische Motivation

Die Forderung nach Kontinuität ist nicht neu oder gar erst durch die Einführung von Computergeometrie entstanden, sondern ist schon durch Poncelet als "Prinzip der Kontinuität" zu Beginn des 19. Jahrhunderts formuliert worden (zitiert nach [Klein26]):

> Eine an einer Figur mit hinreichender Allgemeinheit erkannte Beziehung gilt auch für alle anderen Figuren, die sich aus ihr durch kontinuierliche Lageveränderung ableiten lassen.

2.2 Didaktische Motivation

Zur didaktischen Motivation der Betrachtung von Kontinuität möchte ich formulieren:

> Forschen und entdecken wird in nicht-kontinuierlichen DGS erschwert. Die visuelle Verifikation von (richtigen) gefundenen

> Zusammenhängen funktioniert nur zufällig. Als Konsequenz entsteht Frustration oder gar ein falsches Bild der Geometrie.

Diese These gilt es, durch Beispiele zu stützen, wie wir es gleich tun werden.

2.3 Mathematische Motivation

Eine weiterer Aspekt ist die formelle, automatische Kontrolle von bearbeiteten interaktiven Arbeitsblättern. Zu diesem Zweck muss die eingesetzte Geometriesoftware einen allgemeinen oder zumindest sehr weitgehenden Algorithmus zum Beweis von geometrischen Sätzen zur Verfügung stellen. Ohne eine vollständige Behandlung des Kontinuitätsbegriffes ist allerdings keine formelle Definition geometrischer Sätze möglich (nicht umsonst griff Poncelet auf sein Kontinuitätsprinzip zurück).

3 Beispiele

Zur Stützung unserer didaktischen These und zur Illustration der mathematischen Motivation sollen hier drei Beispiele dienen.

3.1 Winkelhalbierende

3.2 Ortskurven

3.3 Kegelschnitte

4 Konsequenzen der Kontinuität

5 Kritische Betrachtung

Literatur [Heintz00] WWW-basierte interaktive Arbeitsblätter für den Geometrie-Unterricht, [Kort99] Foundations of Dynamic Geometry, Dissertation, ETH Zürich, Institut für Informatik, 1999.

[RiGeKor99] The Interactive Geometry Software Cinderella, CD-ROM & Book, Springer-Verlag, Heidelberg 1999.

[RiGeKor99b] Euklidische und nicht-euklidische Geometrie mit Cinderella, Tagungsband zum Nürnberger Kolloquium zur Didaktik der Mathematik 1999, herausgegeben von Prof. Thomas Weth.

[RiGeKor00] Cinderella — die interaktive Geometriesoftware, CD-ROM, HEUREKA-Klett, Stuttgart 2000.