

Andrea HOFFKAMP, Technische Universität Berlin

## **Dynamisierter Repräsentationstransfer und Metavariation – Ein Ansatz zur Förderung funktionalen Denkens durch Computereinsatz**

### **Funktionales Denken – Begriff und Aspekte**

In der Meraner Reform (1905) wurde die "Erziehung zum funktionalen Denken" als Sonderaufgabe gefordert. Gemeint war ein gebietsübergreifendes Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten (Krüger). Vollrath definiert funktionales Denken als "eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist". Die Komplexität funktionalen Denkens ist einerseits bedingt durch die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Abhängigkeiten (Text, Graph, Formel, Tabelle usw.) und andererseits durch verschiedene Sichtweisen: Zuordnungsaspekt (punktweise Sicht), Kovariationsaspekt (dynamische Sicht), Objektaspekt (Funktion als Ganzes). Insbesondere die dynamische Komponente funktionalen Denkens bereitet Schwierigkeiten (Malle). Das äußert sich beispielsweise darin, dass Funktionsgraphen als fotografische Bilder von Realsituationen interpretiert werden (Graph-als-Bild-Fehler). Insbesondere Weg-Zeit-Graphen werden oft als Bewegung in der Ebene gesehen (Janvier, Hoffkamp). Dem hier beschriebenen Ansatz liegt die Frage zugrunde, wie der Umgang mit Funktionen auf das funktionale Denken zurückwirkt.

### **Curricularer Standort**

Vollrath schreibt: "Funktionales Denken beginnt bei intuitiven Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge wie 'Wenn man die eine Größe ändert, dann ändert sich die andere' oder 'Je mehr..., desto mehr', und es ist voll entwickelt bei Denkweisen der Analysis". Die Realität ist aber ein kalkülorientierter Analysisunterricht mit wenig inhaltlichen Vorstellungen. Deswegen plädieren Hahn/Prediger für eine stärkere Gewichtung der qualitativen Anfänge der Analysis – eine Forderung die im Übrigen schon 100 Jahre alt ist (Krüger). Die Lernumgebungen verstehen sich als ein Beitrag zu einer qualitativen Annäherung an die Analysis bzw. als Beitrag zur Analysis-Propädeutik.

### **Interaktive Lernumgebungen und Gestaltungsleitlinien**

Insgesamt wurden drei interaktive Lernumgebungen auf Basis der dynamischen Geometrie Software Cinderella (Kortenkamp/Richter-Gebert) entwickelt. Die Lernumgebungen sind gemeinsam mit Unterrichtsmaterialien unter [www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp](http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp) verfügbar. Zwei der Lernumge-

bungen wurden im Rahmen von Voruntersuchungen in Klasse 10 getestet (Hoffkamp). Die Voruntersuchungen dienten der Überarbeitung der Lernumgebungen und deren Einsortierung in einen curricularen und lerntheoretischen Rahmen. Allen Lernumgebungen liegen die folgenden Gestaltungsleitlinien zugrunde.

*Verknüpfung Situation-Graph:* Anknüpfend an inhaltlichen Vorstellungen ist der Ausgangspunkt jeweils ein funktionaler Zusammenhang innerhalb einer Situation und deren dynamische Verknüpfung mit der Darstellungsform Graph (Abb.1).

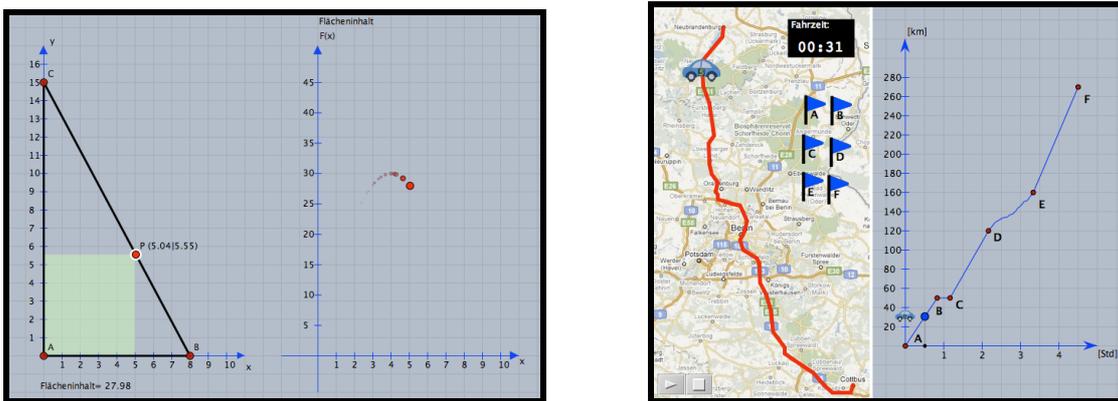


Abb.1: "Einbeschriebene Rechtecke" (links): Bewegung von P auf BC und Auswirkung auf den Punkt im Flächeninhaltsgraphen. "Die Reise" (rechts): Bewegung des Punktes im Weg-Zeit-Graph bewirkt Positionsänderung des Autos (Quelle: Google Maps).

Die graphische Darstellung wurde gewählt, weil sie sich besonders auf die dynamische Komponente funktionalen Denkens bezieht. Außerdem enthält sie die gesamte Information über die Funktion "auf einen Blick", was insbesondere im Hinblick auf kognitive Verarbeitungsprozesse von Bedeutung ist. Ein Schwerpunkt der graphischen Darstellung sind lokale und globale Eigenschaften der Funktion.

*Sprache als Vermittler:* Die Schüler verbalisieren ihre Beobachtungen im Gespräch und auf einem begleitenden Arbeitsbogen. Sprache dient einerseits als Vermittler zwischen den Darstellungen und den mentalen Modellen der Schüler (Janvier) und andererseits als Anstoß für kognitive Prozesse und kooperative Lernprozesse.

*Zwei Variationsstufen:*

*(Ko-)Variation innerhalb der Situation (1. Stufe):* Auf dieser Stufe wird der dynamische Aspekt der funktionalen Abhängigkeit visualisiert (Abb.1). Damit sollen mentale Simulationsprozesse visuell unterstützt werden (s. Vogel '06 zu Untersuchungen zur Wirksamkeit von Supplantation). Insbesondere geht es um die Entdeckung und Beschreibung globaler und lokaler Eigenschaften der dargestellten funktionalen Abhängigkeiten mit Blick auf

Dynamik und Änderungsverhalten und zwar im Repräsentationstransfer zwischen Situation und Graph.

*Metavariation und Objektaspekt (2. Stufe):* Auf dieser Variationsstufe kann die Situation verändert und die Auswirkungen auf die Funktion untersucht werden. Metavariation meint Variation innerhalb der Metafunktion – damit sei die Funktion bezeichnet, die der Situation den Graphen zuordnet. Der Graph bzw. die Funktion, die dem Graphen zugrunde liegt, ist ein Bild unter der Metafunktion und damit ein Objekt (Abb.2). Objektaspekt und Kovariationsaspekt hängen eng zusammen. Will man globale (Objekt-) Eigenschaften wie "Monotonie" oder "Symmetrie zur y-Achse" beschreiben, so benutzt man die "Sprache der Kovariation", nämlich "Ist  $x \geq y$ , so ist  $f(x) \geq f(y)$  für alle  $x, y$ " oder "Für alle  $x$  ist  $f(x) = f(-x)$ ". Metavariation ermöglicht die Loslösung von konkreten Werten und legt damit den Schwerpunkt auf qualitative Betrachtungen. Der Objektaspekt wird nutzbar gemacht, ohne dass er in das mentale Konzept von Funktion integriert sein muss.

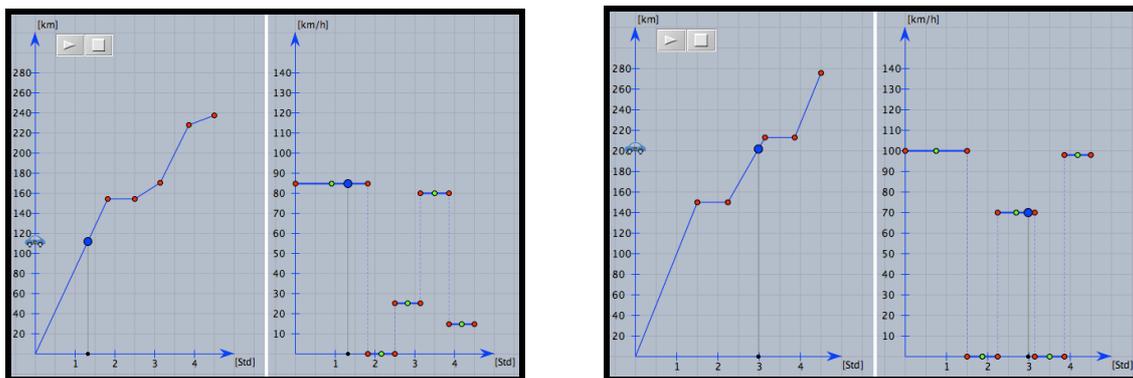


Abb.2: Metavariation in "Die Reise". Die Höhe und Breite der Balken im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen können verändert werden. Metafunktion ist der Differentialoperator bzw. der Integraloperator.

*Kontiguität:* Um eine möglichst integrierte Darstellung zu erhalten, wurde auf räumliche und zeitliche Nähe von sich aufeinander beziehenden Darstellungsformen geachtet, sowie das Prinzip verfolgt, dass Bewegung genau dort geschieht, wo mit der Maus agiert wird.

*Geringer technischer Overhead und Praktikabilität:* Die Lernumgebungen sind ohne Einarbeitungszeit oder Spezialwissen über die Software nutzbar. Zur Benutzung genügt ein Standardinternetbrowser. Sie sind im Hinblick auf Nutzbarkeit im Unterrichtsalltag entwickelt.

## Lerntheoretischer Hintergrund

Lerntheoretisch liegt der Conceptual-Chance-Ansatz (Vosniadou) zugrunde. Im Lichte dieses Ansatzes ist beispielsweise der Graph-als-Bild-Fehler eine Aktivierung einer nicht-situationsadäquaten Vorstellung. Es geht dabei

nicht um die Ablösung vorunterrichtlicher Vorstellungen, sondern um Vorstellungsentwicklung, mit dem Ziel der Verschiebung der Aktivierungskontexte (Hahn/Prediger).

### **Forschungsfragen und Ausblick**

Mit den Lernumgebungen soll im Rahmen einer qualitativen Studie u.a. folgenden Forschungsfragen nachgegangen werden:

Werden durch die Arbeit mit den Lernumgebungen Grundvorstellungen im Hinblick auf die dynamische Komponente funktionalen Denkens aufgebaut (Vorstellungsentwicklung)? Werden diese Vorstellungen in das mentale Konzept von Funktion integriert und insbesondere bei der Interpretation von bzw. Modellierung durch Funktionsgraphen aktiviert, indem lokale und globale Eigenschaften qualitativ beschrieben und erfasst werden können (Verschiebung der Aktivierungskontexte)? Wie wirkt sich die Arbeit mit den Lernumgebungen auf lernschwächere Schüler im Vergleich zu stärkeren Schülern aus?

### **Literatur**

Hahn, S., Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zu Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD*, 29(3/4), 163-198.

Hoffkamp, A. (2007). Funktionales Denken fördern durch den Einsatz von Dynamischer Geometrie Software. *Aufgaben mit Technologieeinsatz, Bericht über die 25. Arbeitstagung des AK 'Mathematikunterricht und Informatik' in der GDM in Soest*. Franzbecker.

Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. Erscheint in: *Proceedings of CERME 6, Lyon*.

Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. PhD thesis. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham.

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. (2006). The Interactive Geometry Software Cinderella, Version 2.0 Springer, Online unter <http://cinderella.de>

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47, 221-241.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg.

Vogel, M. (2006). Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimedialbasierter Supplantation. Franzbecker: Hildesheim.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. *JMD*, 10(1), 3-37.

Vosniadou, S, Vamvakoussi, X. (2006). Examining Mathematics Learning from a Conceptual Change Point of View: Implications for the Design of Learning Environments. In: L. Verschaffel et al. (Eds.), *Instructional Psychology: Past, present, and future trends – Sixteen essays in honour of Erik De Conte. Advances in Learning and Instruction Series*. Elsevier.