

Christian DOHRMANN, Halle, Ana KUZLE, Paderborn

## **Past-Present-Future: Winkel anschaulich unterrichten!**

### **Motivation**

Der Winkelbegriff und das Messen von Winkeln sind von zentraler Bedeutung für die ebene Geometrie und Raumgeometrie. Im Alltag begegnet man vielfältigen Winkelsituationen, wie z.B. beim Autofahren oder in Orientierungssituationen. Darüber hinaus ist die Winkelmessung in vielen Berufszweigen von größter Bedeutung, wie z.B. bei Architekten, (Bau-) Ingenieuren, Schreibern oder Piloten (Berry III & Wiggins, 2001). Der Winkelbegriff ist aufgrund vielfältiger Aspekte und Definitionen ein komplexer Gegenstand des Geometrieunterrichts.

Im Mathematikunterricht sind Sätze über Gleichheit, Summen und Differenzen von Winkeln in der gesamten Geometrie relevant. SchülerInnen zeigen Schwierigkeiten bei der operativen und konzeptuellen Winkelbegriffsentwicklung (z.B. Krainer, 1989; Mitchelmore & White, 2000). Im Beitrag werden Schulbuchanalysen mit typischen Fehlermustern und Fehlerkonzepten kontrastiert und Schlussfolgerungen für eine anschauliche Begriffsbildung diskutiert.

### **Winkel - ein aspektreicher Begriff**

Definitionen dienen in der Geometrie als Grundlage, geometrische Begriffe eindeutig voneinander abzugrenzen. Das Bedürfnis eindeutiger Begriffsdefinitionen ist seit der philosophischen Auseinandersetzung mit der Mathematik als Strukturgebilde der Welt erwachsen und bis heute ein zentraler Bestandteil der Schulmathematik. In Schulbüchern finden sich überwiegend Definitionen wieder, die den Winkel als sich schneidendes Geraden- bzw. Halbgeradenpaar aufgreifen. Nur selten wird der Winkel als Punktmenge, festgelegt durch zwei Halbgeraden, definiert.

Darüber hinaus fällt das inhomogene Aufgreifen der vielfältigen Winkelaspekte auf. Während einige Schulbücher ausschließlich den rein statischen Winkelaspekt (Winkel als Figur bzw. Beziehungssystem) betonen, wird der dynamische Aspekt (Winkel als Drehung) seltener integriert. Woher kommen diese unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen in Schulbüchern?

Die Notwendigkeit von Begriffsdefinitionen für die Entwicklung der theoretischen Fundierung der Geometrie wird historisch an zwei Zugängen skizziert, zum einen abbildungsgeometrisch in der Tradition der Vertreter Felix Klein und Gustave Choquet, zum anderen kongruenzgeometrisch nach Euklid und David Hilbert.

Klein entwickelt in seinen „*Grundlagen der Geometrie*“ ein Axiomensystem, welches gänzlich ohne die Verwendung des Winkelbegriffs auskommt. Er führt den Winkel als Maß einer Drehbewegung ein, ohne ihn definitorisch festzulegen. Choquet begründet die affine Struktur der Ebene in seinem Werk „*Neue Elementargeometrie*“ ebenfalls ohne auf den Winkelbegriff zurückzugreifen. Winkel werden in seinen theoretischen Betrachtungen als Drehungen interpretiert. Sie gewährleisten so „die wesentliche Eigenschaft, Teilmengen der Ebene mit Hilfe bestimmter Operationen an anderer Stelle wieder zu fixieren“ (Krainer, 1989). Dem Winkel und der Drehung liegt hier die gemeinsame Idee der „formalen Beziehung zwischen zwei Richtungen“ (Krainer, 1989) zugrunde. Beim kongruenzgeometrischen Zugang nach Euklid und Hilbert treten Winkel als formale Notwendigkeit auf, um Beziehungen (Kongruenz) zwischen geometrischen Objekten innerhalb eines Axiomensystems zu beschreiben.

In beiden Zugängen zur Geometrie werden unterschiedliche Winkelaspekte betont: Winkel als Drehung (Choquet), Winkel als Maß einer Drehbewegung (Klein), Winkel als Neigung (Euklid) oder Winkel als Theorieelement zur Beschreibung von Beziehungen (Hilbert). Neben den Winkelaspekten, die bei Krainer auch als Winkelvorstellungen ausgearbeitet werden, existieren unterschiedliche Ansätze von Winkeldefinitionen. Einerseits als sich schneidendes Paar von Geraden/Strahlen/Halbgeraden (Figur), andererseits als Punktemenge beim Überstreichen der Ebene (Drehung).

Ergänzt man dies um die Winkelvorstellungen nach Krainer, dann zeichnet sich ein Bild eines multidimensionalen Begriffes ab, der je nach Bedürfnis und geometrischem Kontext vielfältige Zugänge und Definitionen liefert. Aus didaktischer Sicht drängt sich die Frage auf, wie ein solch facettenreicher Gegenstand im Unterricht aufgegriffen werden kann, um die vielseitigen Aspekte anschaulich zu vermitteln.

Krainer untersuchte Ende der 1980-er Jahre typische Schülerfehler beim Operieren und Argumentieren mit Winkeln und entwickelte ein Konzept basierend auf der Idee eines aspektreichen und anschaulichen Unterrichts. Um die Aspektvielfalt zum Winkel aufzuzeigen und einsichtig zu gestalten, müssen vielfältige anschauliche Zugänge angeboten werden. Diese Forderung erscheint bei aktueller Analyse von Schulbüchern und Schülerleistungen zum Winkelbegriff und -verständnis auch nach über 30 Jahren gerechtfertigt und diskussionswürdig.

Unsere Untersuchung zu Winkelvorstellungen bei Fünft- und Zehntklässlern bestätigen die Beobachtungen von Krainer (1989): Vergleiche von Winkeln erfolgen über Vergleiche der Schenkellängen; Winkel werden vorrangig als „rechte Winkel“ wahrgenommen; Rotation bzw. Drehung

wird nicht als Winkelaspekt wahrgenommen bzw. interpretiert; Winkel werden vorrangig als Figur, bestehend aus zwei aneinanderstoßenden Kanten bzw. Strecken gedeutet. Es liegt die Vermutung nahe, dass sich frühzeitig „erworbene“ Fehlvorstellungen während einer Schullaufbahn robust halten. Mitchelmore & White (2000) bestätigen diesen Effekt in einer Untersuchung zum Winkelverständnis von Erwachsenen.

### **Ausbildung des Winkelbegriffs in der Grund- und Sekundarschule**

Das Thema Winkel ist kein zentrales Thema der Geometrie der Grundschule. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004) findet keine direkte Erwähnung statt. In Lehrplänen werden Kompetenzerwartungen nach Klasse 4 im Bereich „Raum und Form“ zum Schwerpunkt „Ebene Figuren“ formuliert: SchülerInnen können den rechten Winkel benennen und zur Beschreibung ebener Figuren verwenden. In Schulbüchern wird ausschließlich der rechte Winkel thematisiert – meist eingeführt über den Faltwinkel. Rechte Winkel sollen mit Hilfe des Faltwinkels in der Umwelt erkannt und mit dem Geodreieck gezeichnet werden. Die systematische Einführung erfolgt je nach Bundesland in Klasse 5/6. Die SchülerInnen verwenden den Winkel zur Beschreibung ebener und räumlicher Figuren, zum Schätzen und Zeichnen. Sie lernen verschiedene Winkelsätze kennen und nutzen Winkel beim direkten und indirekten Messen. Visuelle Beispiele an der Tafel oder im Schulbuch werden auf Darstellungen reduziert, welche sich an den verwendeten Begriffsdefinitionen – und Konventionen – orientieren, losgelöst vom „wirklichen Leben“.

Im Unterricht lernen die SchülerInnen entweder den statischen und dynamischen, oder nur den statischen Aspekt des Winkels kennen. Der dynamische Winkelaspekt betont die Tatsache, dass ein Winkel durch eine Drehbewegung entsteht. Beim statischen Aspekt liegt die Betonung auf dem Winkelfeld, jenem Gebiet der Ebene, das durch die beiden Schenkel begrenzt wird. Jedem Winkel ist sein Winkelfeld als Punktmenge zugeordnet. Beide Aspekte werden beim Zeichnen und Messen von Winkeln aufgegriffen.

Im Unterricht kommen verschiedene Winkelgeräte zum Einsatz, am häufigsten das Geodreieck und (Halb-, Voll-) Kreiswinkelmesser. Beobachtungen und Schulbuchanalysen zeigen, dass das Erlernen des Umgangs mit den Werkzeugen einer Sinnentwicklung für Winkelgrößen häufig vorangestellt wird. Durch Routineaufgaben werden Prozeduren eingeübt, ohne ein tieferes Verständnis zum Geodreieck als Messwerkzeug aufzubauen, wodurch im Grunde genommen das konzeptuelle Verständnis der Winkeloperationen behindert wird (Van de Walle, 2001).

SchülerInnen verinnerlichen den statischen Aspekt, wobei Winkelmessungen häufig auf einem Bild eines Winkelmessers in Standardposition basieren, unabhängig von der Richtung. Darüber hinaus verwechseln SchülerInnen durch eher prozedurale Aufgaben Winkelkonzepte mit sichtbaren Aspekten der Repräsentation (Länge der Schenkel oder Fläche zwischen den Schenkeln). Durch das Nutzen des Geodreiecks und mangelndem Verständnis des Winkelbegriffs entwickeln SchülerInnen ein fragmentiertes Verständnis des Winkelbegriffs (z. B. Mitchelmore & White, 2000; Munier, Devichi, & Merle, 2008; Van de Walle, 2001). Um die richtige Skala auf dem Winkelmesser aussuchen zu können, müssen SchülerInnen tragfähige Vorstellungen zu Winkelgrößen entwickeln und in der Lage sein, Winkel in einer treffsicheren Größenordnung zu schätzen. Das Geodreieck betont darüber hinaus den statischen Aspekt des Winkels, wobei das Werkzeug für den dynamischen Aspekt ungeeignet ist.

### **Ausblick**

Basierend auf den Schulbuchanalysen, dem typischen Gebrauch der Werkzeuge und der daraus erzielten Wirkung plädieren wir für ein schüleraktivierendes, verständnisorientiertes und anwendungsorientiertes Konzept zum Lehren und Lernen des Winkelbegriffs. Dabei sollen die SchülerInnen durch geeignete Tätigkeiten an Umweltsituationen die Grundideen und Aspekte des Winkelbegriffs entdecken, um das Verständnis für den Begriff und den zugehörigen Operationen zu entwickeln. SchülerInnen müssen die Aspektvielfalt verinnerlichen, um bspw. entscheiden zu können, welches Messwerkzeug in bestimmten Situationen geeignet ist. Allgemein muss die Fähigkeit entwickelt werden, in Alltagssituationen mit Winkeln umzugehen.

### **Literatur**

- Berry III, R. Q., & Wiggins, J. (2001). Measurement in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(3), 154–156.
- Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Jahrgangsstufe 4 (Primarstufe)*. Bonn: KMK.
- Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes*. Frankfurt a.M: Peter Lang.
- Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209–238.
- Munier, V., Devichi, C., & Merle, H. (2008). A physical situation as a way to teach angle. *Teaching Children Mathematics*, 14(7), 402–407.
- Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (4<sup>th</sup> ed.). White Plains, NY: Addison Wesley.